



ELEMENTI DI ARITMETICA.

C A P. I.

Nozioni Preliminari.

1. **S**i dicono *grandezze o quantità* tutte quelle cose le quali possono ricevere accrescimento, o diminuzione, purchè sieno paragonabili con le altre della medesima specie di esse.

Ognuno vede che noi non possiamo avere una idea esatta della quantità, se non se paragonandola ad un'altra della medesima specie da noi conosciuta per abitudine, la quale possa servire di termine di paragone.

2. La quantità che serve di termine di paragone fra le altre quantità della sua medesima specie si chiama *unità*.

3. Si dice *numero* il rapporto, che passa tra una quantità e quella che abbiamo scelta per unità.

4. Se questo rapporto è espresso dalla riunione di più unità, si dice *numero intero*; e si dice *numero frazionario* o semplicemente *frazione*, se esso è espresso in parti dell'unità.

Quindi il numero intero è la collezione di più unità.

5. Si chiamano *operazioni di calcolo*, quelle operazioni per mezzo delle quali noi componiamo, e scomponiamo li numeri.

6. Si chiama *Aritmetica* la scienza, la quale dà li metodi per eseguire facilmente le operazioni di calcolo.

7. Qualora noi ci proponiamo di comporre la serie naturale de' numeri interi, subito ci accorgiamo, che essa è illimitata, poichè non vi è numero, per quanto grande esso sia, che non possa divenire maggiore aggiugnendo ad esso una unità, e che tra qualunque numero della serie, ed il suo vicino esiste la differenza costante di una unità.

8. Noi ci occuperemo in primo luogo della formazione della serie naturale de' numeri, cioè della serie de' numeri che differiscono ciascuno dal suo vicino di una unità.

3
indi della maniera di dare a ciascuno di essi un nome, ed in fine della maniera di scri-
verli per mezzo delle cifre, le quali tre co-
se costituiscono ciò, che noi chiamiamo *nu-
merazione*.

9. Per formare la serie naturale de' nu-
meri, noi incominceremo dall'aggiugnere una
unità ad un'altra unità, e così formeremo il
primo numero, questo numero aumentato di
una unità dà il numero seguente, e conti-
nuando così ad aggiugnere successivamente
una unità a ciascuno de' numeri formati,
avremo la serie naturale de' numeri, nella
quale ciascuno de' numeri differisce di una uni-
tà dal suo vicino.

10. Dopo di avere appreso a formare la
serie naturale de' numeri, noi ci accorgiamo
della necessità in cui siamo di distinguerli,
dando a ciascuno di essi un nome, ma la mol-
titudine di essi, e la illimitazione della se-
rie naturale mettendoci nella impossibilità
di dare a ciascuno di essi un nome partico-
lare; gli aritmetici sono giunti ad esprimerli
tutti con un piccol numero di nomi varia-
mente modificati; tali nomi semplici sono
*uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette,
otto, nove*; indi con il numero che nasce dal-
l'unire una unità al numero nove, ossia con
la collezione di nove unità più una unità, for-
marono un nuovo ordine di unità, ossia una
unità di secondo ordine, che essi chiamarono

decina, e come essi aveano contato da una unità fino a nove unità, così contarono da una decina fino a nove decine; ed invece di dire una decina, due decine, tre decine ... nove decine, dissero *dieci*, *venti*, *trenta* ... *ottanta*, *novanta*; ma come la serie naturale ricevea una interruzione trovandosi una lacuna tra dieci e venti, tra venti e trenta cc., per esprimere li numeri compresi tra due numeri consecutivi di decine, stabilirono di enunciare successivamente li numeri delle decine, e quelli delle unità, così la collezione di quattro decine e sette unità fu espressa dicendo quarantasette, e quantunque da essi si fosse stabilita questa regola generale, pure l'uso ha fatto ad essa subire una eccezione per gli sei primi numeri, che sono tra dieci e venti, in fatti invece di dire secondo la regola *dieci ed uno*, *dieci e due*, *dieci e tre*, *dieci e quattro*, *dieci e cinque*, *dieci e sei*, noi diciamo *undeci*, *doceci*, *tredecì*, *quattordeci*, *quindeci*, e *sedeci*.

Con la collezione di novantanove unità più una unità formarono il numero *cento*, ossia una unità del terzo ordine, che chiamarono *centinajo*, e contarono similmente da un centinajo fino a nove centinaja, e contarono li numeri compresi tra li due numeri consecutivi di centinaja aggiungendo ai nomi dei numeri delle centinaja quelli de' novantanove primi numeri, così la collezione di sei cen-

tinaja otto decine e quattro unità fu espressa dicendo sei cento ottanta quattro, e così facendo si giunse ad esprimere tutti li numeri dall' unità fino a novecento novantanove, numero che accresciuto di una unità formò il numero che essi chiamarono *mille*, e dalla collezione di mille unità formarono un nuovo ordine di unità, che chiamarono *migliaja* o *unità del quarto ordine*, e similmente contarono da mille fino a nove mila, e per esprimere li numeri che sono tra mille e duemila, tra duemila e tremila ec. aggiunsero al nome delle migliaja quelli de' novecento novantanove numeri precedenti, indi seguendo l' analogia, a la collezione di novemila novecento novantanove unità più una unità avrebbe dovuto darsi un nuovo nome, ma essi convennero di dare alle decine di migliaja i nomi di diecimila, ventimila, trentamila ec. contando le migliaja della stessa maniera, secondo la quale essi aveano contato le unità, cioè per unità, decine, e centinaja di migliaja, incominciando dalle unità di migliaja fino a mille unità di migliaja che essi chiamarono *milione*; talchè la collezione di novecento novantanovemila novecento novantanove più uno forma il *milione*, quella di mille milioni forma il *bilione*, quella di mille bilioni il *trilione* e così procedendo avanti. I nomi dei numeri che riempiono le lacune, che esistono tra un milione ed un bilione, si avranno ag-

giungendo ai nomi un milione, due milioni, tre milioni ec. quelli delli novantanovemila novecento novantanove numeri precedenti; e così in appresso.

11. Da quanto abbiamo detto ricaviamo, che il nome di qualsivoglia numero dipende dalla sola combinazione de' nomi de' novecentonovantanove primi numeri, con aggiugnere ad essi le parole unità, migliajo, milione, bilione ec., in modo che un numero non può contenere più di nove unità, nove decine, nove centinaia di ciascuna delle suddette specie di unità.

12. Resta ora a vedere come gli aritmetici hanno trovato il metodo di scrivere li numeri in una maniera abbreviata, e comoda, per potere eseguire sopra di essi le operazioni del calcolo; ciò che forma l'ultima parte della numerazione.

13. Gli aritmetici osservando, che con i nomi dati alli nove primi numeri potevano esprimere in una maniera metodica, e breve tutti li numeri della serie naturale, stabilirono di adottare nove cifre per esprimere sì fatti nove numeri, e come la combinazione de' nomi de' nove primi numeri con quelli delle differenti specie di unità avea dato i nomi a tutti li numeri, così essi sottomisero le nove cifre alla medesima legge, esprimendo con la medesima cifra il medesimo numero tanto quando esso rappresentava le unità, quan-

7
to allorchè esso esprimeva le decine, le centinaja, le migliaja ec. Le cifre esprimenti li nove primi numeri furono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Con queste nove cifre essi semplificarono un poco la espressione scritta dei numeri; poichè rimpiazzarono li nomi dei numeri delle unità, delle decine, delle centinaja ec. con le cifre che esprimevano sì fatti numeri, così dovendo scrivere il numero settecento novantasei, essi lo scomposero in sette centinaja, nove decine, e sei unità e lo scrissero come segue.

7 Centinaja 9 decine 6 unità; maniera di scrivere il numero proposto, la quale quantunque non sia abbastanza abbreviata, pure è commoda per gli calcoli, poichè mette in evidenza li numeri delle unità di ciascheduna specie. Questo esempio basta per farci conoscere in quale maniera essi poterono travedere la possibilità di scrivere tutti li numeri per mezzo della semplice combinazione delle nove cifre con le parole unità, decine, centinaja ec. Ma la necessità di sotto-mettere li numeri alle operazioni del calcolo, fece sì, che essi si accorgessero, che la miscela delle parole *unità, decine, e centinaja* ec. complicava la scrittura de' numeri, e che per conseguenza sarebbe stato necessario di fare scomparire le lettere, perciò essi classificarono li nomi delle unità, delle decine, delle centinaja ec. secondo il loro posto, chiama-

do le unità semplici col nome di *unità del primo ordine*, le decine furono dette *unità del secondo ordine*, le centinaja *unità del terzo ordine* ec. ed in conseguenza di questa convenzione essi scrissero il numero settecento novantasei, così

Unità del terzo ordine, 9 unità del secondo ordine 6. unità del primo ordine;
Questa forma quantunque molto complicata fece in essi nascere l'idea di disporre le cifre le une a fianco delle altre, in modo che il posto che ciascuna di esse si trovava ad occupare, designasse l'ordine delle unità che essa esprimeva, e si convenne, che qualora si trovavano molte cifre scritte le une a fianco delle altre, la prima a destra designasse le unità del primo ordine, ossia le unità semplici, la seconda le unità del secondo ordine ossia le decine, la terza le unità del terzo ordine ossia le centinaja, e così procedendo avanti; e secondo questa convenzione il numero settecento novantasei si scrive 796, giacchè il 7 occupando il terzo luogo andando da destra a sinistra esprime sette unità del terzo ordine, ossia 7 centinaja, la cifra 9 occupando il secondo luogo, disegna 9 unità del secondo ordine, ossia 9 decine, e la cifra 6 occupando il primo luogo, esprime 6 unità del primo ordine, ossia 6 unità semplici; e così ad ogni cifra si trovarono assegnati due valori, cioè il *valore proprio*, che è quello

9
che essa indica senza fare attenzione alla specie delle sue unità, ed il *valore locale*, che è quello che essa ha facendo attenzione al grado delle unità, che essa disegna, il quale grado è indicato dal posto, che essa occupa alla sinistra della prima cifra.

14. Ma non si tardò molto ad acorgersi, che molti numeri non potrebbero essere scritti secondo questo sistema, in fatti per mezzo di esso non si potrebbe scrivere un numero, in cui mancasse qualcheduno degli ordini di unità di grado inferiore a quello del più alto grado, quindi furono condotti ad inventare la cifra ausiliaria, 0, che chiamarono zero, la quale, non avendo in se valore alcuno, potesse adoperarsi soltanto per conservare alle cifre significative il luogo che appartiene all'ordine delle loro unità; così volendo scrivere il numero due mila settanta quattro composto da due migliaia da sette decine, e quattro unità, e che non contiene centinaja, si mette un zero tra la cifra 2 che disegna le due migliaia, e la cifra 7 che disegna le 7 decine, per disegnare che la cifra delle centinaja manca, ed il numero dato sarà espresso da 2074.

15. Da quanto abbiamo detto ricaviamo le seguenti due regole generali. 1. Qualora si vuole scrivere un numero enunciato in lettere, o dettato, *si scrivono successivamente l'una a fianco dell'altra incominciando*

dalla sinistra le centinaja , le decine , e le unità di ciaschedun ordine ternario , e si rimpiazzino per mezzo di zeri le cifre delle unità , delle decine , o delle centinaja delle unità di sì fatto ordine , che potrebbero mancare , e giunti alla cifra delle unità semplici , il numero enunciato sarà scritto in cifre.

Così se si deve scrivere il numero sei milioni sette mila ed otto. Noi consideriamo che nel numero dato le unità del più alto grado sono li milioni , quindi conchiudiamo che il numero deve avere tre sezioni , cioè una per gli milioni , una per le migliaja , ed una per le unità semplici ; noi metteremo perciò in ogni una di esse , prima la cifra delle centinaja , indi quella delle decine , ed in fine quella delle unità enunciate , facendo attenzione a supplire con i zeri le cifre delle unità dall'ordine mancante , ed il numero dato sarà scritto così 6007008. II. Per enunciare , o dettare un numero scritto , si divida il numero in sezioni di tre cifre l'una incominciando dalla destra , l'ultima sezione a sinistra potendo essere composta di tre cifre , e potendone contenere due , ed anche soltanto una , indi si enuncj ciascuna delle sezioni significative come se essa fosse sola , dandole il nome della unità , che ad essa appartiene ; queste unità sono dell'ordine dall'ultima delle cifre della sezione dell'ordine che si considera , in modo che an-

dando dalla destra verso la sinistra, li nomi delle sezioni ternarie si succedono così, unità, migliaja, milione, bilione ec. *Quando avremo enunciata l'ultima cifra della sezione significativa a destra, noi avremo enunciato il numero proposto.*

Così volendo enunciare il num.^o 9008004 scritto in cifre, noi lo divideremo in sezioni di tre cifre l'una, incominciando dalla destra, indi enuncieremo ciascuna delle sezioni incominciando dalla sinistra, ed aggiugnere-
mo alla enunciazione di ciascuna sezione significativa il nome delle unità che essa esprime; ed avremo in quella maniera enunciato il numero dato; così il dato numero 9008004 sarà enunciato dicendo nove milioni otto mila quattro.

16. Un numero è detto *astratto* quando da noi si considera facendo astrazione dalla natura delle sue unità, così il numero 36 unità, oppure 36 volte 1, è un numero *astratto*. Il numero poi è detto *concreto*, qualora si disegna la specie delle unità, delle quali esso è composto. Così 36 ducati, 17 miglia, 12 cantaja ec. sono numeri *concreti*.

Composizione de' Numeri.

ARTICOLO I

Della Addizione.

17. **S**i dice *addizione* l'operazione di calcolo, per cui dati due numeri rapportati alla medesima unità, si cerca un altro numero che solo contenga tutte le unità de' numeri dati. Il numero, che risulta da questa operazione, si dice *somma*, o *totale*.

Sebbene spesso accada, che sieno dati più di due numeri da addizionare insieme, pure se si fa attenzione al processo della operazione, noi vediamo che essa si esegue sempre sopra due numeri.

18. In conseguenza della definizione data si vede chiaramente, che la somma di due numeri dati si potrebbe ottenere aggiugnendo ad uno di essi successivamente tutte le unità dell'altro, ma subito ci accorgiamo che qualora il numero dato per essere aggiunto all'altro è un numero piccolo, tale operazione è eseguibile, e che se sì fatto numero è molto grande la operazione non solo diviene lunga, e penosa, ma ancora alcune volte essa è

ineseguibile ; quindi noi siamo obbligati di cercare un metodo da potere eseguire la addizione in sì fatti casi. Ma considerando che noi avremmo la somma totale de' numeri dati , qualora noi avessimo un numero il quale contenesse in se le somme delle unità di differenti gradi, dalle quali sono composti li numeri dati, poicchè allora la ricerca della somma totale dipenderebbe dalla ricerca delle somme successive delle unità, delle decine, delle centinaja, etc. delli numeri dati ; e come li numeri esprimenti le unità de' varj ordini, che compongono li numeri dati, sono sempre espressi da una cifra sola , facendo le addizioni parziali successive di sì fatti numeri, noi faremo dipendere la ricerca della somma de' grandi numeri da quella de' piccoli numeri espressi da una sola cifra, che noi sappiamo eseguire.

Così, per esempio, se ci proponiamo di addizionare li due numeri 3584, ed 8697, noi diciamo così ; la somma di questi due numeri risulta dalla somma delle 7 unità dell'uno con le 4 unità dell'altro, delle 9 decine dell'uno con le 8 dell'altro, etc. ; ma le 7 e 4 unità de' numeri dati fanno 11 unità, ossia 1 unità, ed 1 decina, la somma di esse darà dunque 1 unità, che noi scriveremo per prima cifra della somma totale, indi diremo che sì fatta somma totale conterrà oltre le 17 decine, che risultano dalla addi-

zione delle cifre delle decine de' numeri dati, anche la decina risultata dall'addizione delle unità, e per conseguenza diremo che essa deve contenere 18 decine, ossia 8 decine, che noi noteremo a sinistra della cifra delle unità della somma totale, ed un centinajo; e diremo la somma totale deve contenere oltre le 11 centinaja che risultano dall'addizione delle centinaja de' numeri dati anche il centinajo fornito dalla somma delle decine di sì fatti numeri; quindi essa conterrà 12 centinaja, ossia 2 centinaja, che noi scriviamo a sinistra della cifra delle decine della somma totale, anche un migliajo, e conchiuderemo dicendo la somma de' numeri dati deve contenere non solo la somma delle 11 migliaja, che risultano dall'addizione delle migliaja de' numeri dati, ma ancora un migliajo risultante dalla addizione delle centinaja delli medesimi numeri, e per conseguenza conterrà 12 migliaja, ossia 2 migliaja, che scriviamo a sinistra della cifra delle centinaja, ed una decina di migliaja, che scriviamo alla sinistra dell'ultima cifra trovata; e così ragionando qualora dovessimo addizionare qualsivogliano altri numeri, noi ricaveremo la seguente regola generale.

19. *Per addizionare più numeri si dispongano gli uni sotto gli altri in modo che le loro unità del medesimo ordine si trovino nella medesima colonna verticale, e sotto di*

essi si tiri una linea per separare li numeri dati dalla loro somma. Dopo di avere così disposta la operazione, si addizionino li numeri contenuti nella colonna delle unità, se la somma di essi non eccede 9, essa si scriva sotto la colonna delle unità, e se essa sorpassa 9, si scrivano soltanto le unità, e si ritengano le decine per riunirle alla colonna delle decine, indi si operi della medesima maniera sulla colonna delle decine, e così in appresso fino a tanto che si giunga alla ultima colonna a sinistra, la somma della quale si scriva tale quale si trova, e l'addizione sarà terminata; avvertendo però che se qualcheduna delle somme parziali contiene soltanto decine senza unità del suo grado, si deve allora mettere un zero sotto la colonna che si è addizionata, per occupare il luogo delle unità di sì fatta colonna, e conservare alle cifre della somma totale il luogo che conviene alla natura delle loro unità.

20. Dalle cose dette si vede che una somma aumenta, o diminuisce di tanto, quanta è la totalità degli accrescimenti, o delle diminuzioni delle parti che la compongono. Imperocchè essendo la somma composta di tutte le parti de' numeri proposti, necessariamente cresce, o diminuisce di tanto quanta è la somma degli accrescimenti, o delle diminuzioni delle parti di questi medesimi

numeri, e perciò una somma non si altera qualora la somma degli accrescimenti delle sue parti è eguale alla somma delle diminuzioni delle medesime parti; poichè sì fatta somma si accrescerebbe e si diminuirebbe della medesima quantità. Ed in fine la somma di due numeri non si cambia qualora di tanto si accresce uno di essi di quanto si diminuisce l'altro.

ARTICOLO II.

Della Moltiplicazione.

21. **S** spesso nella addizione noi dobbiamo addizionare più numeri tra loro eguali, nel quale caso la somma di essi deve contenere un medesimo numero tante volte quante volte noi lo abbiamo scritto; per designare questa specie particolare di addizione, e fare conoscere che una somma contiene due, tre, quattro, etc. volte un numero dato, abbiamo detto che essa è il *doppio*, il *triplo*, il *quadruplo*, etc., ed in generale un *moltiplice* del numero dato, locchè ha fatto nascere le espressioni *duplicare*, *triplicare*, *quadruplicare*, etc., ed in generale *moltiplicare* un numero dato, per indicare che si vuole trovare la somma di un tale numero scritto due, tre, quattro, ed in generale un numero qualunque di volte.

Ma

17
Ma ogn' un vede , che se si volesse fare una tale operazione con la regola esposta , essa diverrebbe lunga , e qualche volta anche impraticabile , nel caso in cui un grande numero dovesse essere ripetuto un grande numero di volte , lo che mostra la necessità di cercare un metodo più semplice per eseguirla ; quindi ne è nata la operazione , che chiamiamo *moltiplicazione* ; la quale è l'operazione di calcolo , per la quale essendo dato un numero se ne trova un altro , il quale sia eguale al dato ripetuto tante volte quante a noi piacerà.

Il numero che si ripete si chiama *moltiplicando* ; ed il numero delle volte che questo numero si avrebbe dovuto scrivere , ossia il numero delle volte , che il moltiplicando deve essere contenuto nella somma , si dice *moltiplicatore* , il risultato della operazione è chiamato *prodotto* ; ed in fine il moltiplicando ed il moltiplicatore sono espressi col nome comune di *fattori* del prodotto. In modo che il prodotto di una moltiplicazione deve essere considerato come un tutto composto da parti eguali , la grandezza delle quali è espressa dal moltiplicando , ed il numero di esse dal moltiplicatore ; quindi in ogni moltiplicazione il *moltiplicatore è essenzialmente un numero astratto* , poichè esso indica il numero delle volte , che si deve prendere il moltiplicando ; nel mentre che il

prodotto deve necessariamente essere della medesima natura del moltiplicando, dalla ripetizione del quale esso è formato; ed infine qualora il moltiplicando è zero, il prodotto deve essere sempre zero, qualunque sia il moltiplicatore, poicchè il zero ripetuto qualunque numero di volte dà sempre zero.

22. Abbiamo detto, che qualora li due fattori sono piccoli numeri volendo avere il prodotto di essi, basta scrivere il moltiplicando tante volte quante ne indica il moltiplicatore, e farne la somma, mezzo sufficiente per farci comodamente trovare li prodotti di tutti li numeri di una cifra moltiplicati a due a due, e poicchè sì fatti prodotti sono in piccol numero, si vede chiaro, che sarebbe sommamente utile di farne un quadro, ed anche di apprenderli a memoria, tanto più che essi sono di grandissimo uso nella moltiplicazione de' numeri composti da più cifre, operazione che noi vedremo dipendere dalla moltiplicazione de' numeri di una sola cifra.

Per rendere questo quadro più comodo, noi disporremo tutte le cifre significative in due colonne, delle quali una sia orizzontale e l'altra verticale, a ciascuna delle case orizzontali faremo corrispondere una nuova colonna verticale, ed a ciascuna delle case della colonna verticale faremo corrispondere una

nuova colonna orizzontale , e per mezzo di questa disposizione troveremo comodo di situare ciascheduno de' prodotti nella casa interna, che corrisponde alle due case una orizzontale , l'altra verticale che contengono li fattori di sì fatto prodotto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Così volendo coll'ajuto di questo quadro , chiamato *tavola pitagorica* , avere il prodotto di 7 per 6 , noi dalla casa dove è il fattore 7 nella prima colonna orizzontale discenderemo verticalmente fino alla casa , che è dirimpetto al fattore 6 nella prima verticale , e nella casa in cui ci saremo arrestati troveremo il numero 42 , che è il prodotto di 7 moltiplicato per 6.

23. Facendo uso della tavola pitagorica, noi ci accorgiamo che il prodotto di due fattori, che hanno ciascuno una cifra non si altera, quantunque si cambj l'ordine de' fattori; quindi per la analogia sembra che da noi si possa conchiudere, che la medesima proprietà appartenga a tutti li numeri; ma come la analogia non ci assicura della verità generale, noi dimostreremo direttamente la proposizione generale, che *il prodotto di due fattori resta sempre lo stesso qualunque sia l'ordine secondo il quale si moltiplicano li due fattori*.

Supponiamo che si abbiano li due fattori 4 e 5, dico che $4 \times 5 = 5 \times 4$.

Il numero 5 equivale ad $1+1+1+1+1$; se si scrive questa fila di unità quattro volte l'una sotto l'altra, noi formeremo il quadro

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

La somma delle unità contenute in questo quadro può essere considerata come formata da quattro file orizzontali, delle quali ciascuna è composta da 5 unità, ossia come il prodotto di 5×4 ; come altresì può essere considerata come formata da 5 file verticali, delle quali ciascuna contenga 4 unità, ossia

21
come il prodotto di 4×5 ; ma questa somma fatta nelle due maniere dà sempre il medesimo numero di unità; dunque 5 ripetuto 4 volte, dà lo stesso numero che risulta dal 4 ripetuto 5 volte, e perciò $5 \times 4 = 4 \times 5$.

24. Quindi in ogni moltiplicazione si può cambiare il moltiplicando in moltiplicatore, ed il moltiplicatore in moltiplicando, senza che il prodotto sia alterato.

25. Può darsi il caso che noi abbiamo tre, o più fattori a moltiplicare fra essi, nel quale caso è chiaro che il prodotto si troverà moltiplicando due di essi fra loro, ed indi moltiplicando di nuovo il prodotto trovato per un altro de' fattori, e così procedendo avanti fino a tanto che si saranno adoperati tutti li fattori dati. Così se noi dovessimo moltiplicare 8, 12, 15, noi potremmo trovare il prodotto dimandato con moltiplicare 8 per 12, ed indi moltiplicare per 15 il prodotto trovato; oppure moltiplicare 8 per 15, e di poi moltiplicare il prodotto trovato per 12; oppure etc. Ma perchè questo processo resti fuori di ogni dubbio, bisogna che sia generalmente dimostrato, che in qualunque ordine si moltiplichino più fattori il prodotto resta sempre lo stesso.

Per ciò fare bisognerebbe in primo luogo disporre li fattori dati in tutte le maniere possibili, indi dimostrare che li prodotti, che risulterebbero dalla moltiplicazione

di essi in tutte le disposizioni sono eguali.

Supponiamo in primo luogo che li fattori sieno al numero di tre, e vediamo di disporli in tutte le maniere possibili.

Per disporre li tre fattori dati in tutte le maniere possibili, ed essere sicuri che nessuna disposizione manchi; noi metteremo ciascuno de' fattori al primo luogo a sinistra, indi alla sua destra situeremo gli altri due fattori in tutte le disposizioni possibili; quindi avremo le sei disposizioni seguenti, supponendo che li fattori dati sieno 8, 12, 15.

$$8 \times 12 \times 15 \quad 12 \times 8 \times 15 \quad 15 \times 8 \times 12$$

$$8 \times 15 \times 12 \quad 15 \times 12 \times 8 \quad 12 \times 15 \times 8$$

Passiamo ora a dimostrare che tutti questi produttori sono eguali.

Noi abbiamo dimostrato che il prodotto di due fattori è sempre lo stesso qualunque sia l'ordine, secondo il quale essi si moltiplicano; quindi nelli due primi ternarj il prodotto di 12 per 15 è lo stesso del prodotto di 15 per 12, ma sì fatti prodotti sono li moltiplicatori del medesimo numero 8, che occupa il primo luogo nelli due primi ternarj. Dunque li prodotti designati da sì fatti due ternarj sono eguali. Con lo stesso raziocinio dimostreremo che $12 \times 8 \times 15 = 12 \times 15 \times 8$, e che $15 \times 8 \times 12 = 15 \times 12 \times 8$.

Resta ora a dimostrare, che uno delli due primj prodotti è eguale ad uno de' secondi, e che uno de' secondi è eguale ad uno

de' terzi. Ma noi vediamo che nel primo prodotto della prima coppia dobbiamo moltiplicare per 15 il prodotto di 8×12 , e che nel primo prodotto della seconda coppia dobbiamo moltiplicare anche per 15 il prodotto di 12×8 quindi sapendo che $8 \times 12 = 12 \times 8$ noi conchiuderemo che $8 \times 12 \times 15 = 12 \times 8 \times 15$. Finalmente nel secondo prodotto della seconda coppia noi dobbiamo moltiplicare per 8 il prodotto di 12×15 , e nel secondo prodotto della terza coppia dobbiamo moltiplicare anche per 8 il prodotto di 15×12 ; dunque $12 \times 15 \times 8 = 15 \times 12 \times 8$. Dunque essendo fra loro eguali li due prodotti formanti ciascheduna delle tre coppie, ed essendo uno de' prodotti della prima coppia eguale ad uno di quelli della seconda, li quattro prodotti delle due prime coppie sono tutti fra loro eguali, e poichè uno de' prodotti della seconda coppia eguaglia uno di quelli della terza, noi conchiuderemo che tutti e sei li prodotti delle tre coppie sono eguali. Resta dunque dimostrato generalmente che *in qualunque ordine si moltiplichino tre fattori, il prodotto resta sempre lo stesso.*

L' Analogia potrebbe farci conchiudere che il prodotto di 4, 5, 6, ec. fattori comunque fra loro ordinati è sempre lo stesso, ma noi possiamo dimostrarlo direttamente facendo uso dello stesso raziocinio, di cui ci siamo serviti per dimostrare la stessa verità qualo-

ra li fattori erano al numero di tre; in fatti supponiamo, che li quattro fattori sieno 8, 12, 15, 19; operando siccome abbiamo fatto per gli tre fattori 8, 12, 15; fissiamo ciascheduno de' quattro fattori nel primo luogo a sinistra e disponiamo a destra di esso li tre altri fattori ordinandoli in tutte le maniere possibili, noi troveremo le quattro disposizioni seguenti

$$\begin{array}{llll}
 8 \times 12 \times 15 \times 19 & 12 \times 8 \times 15 \times 19 & 15 \times 8 \times 12 \times 19 & 19 \times 8 \times 12 \times 15 \\
 8 \times 12 \times 10 \times 15 & 12 \times 8 \times 10 \times 15 & 15 \times 8 \times 10 \times 12 & 10 \times 8 \times 15 \times 12 \\
 8 \times 15 \times 12 \times 19 & 12 \times 15 \times 8 \times 19 & 15 \times 12 \times 8 \times 19 & 19 \times 12 \times 8 \times 15 \\
 8 \times 15 \times 10 \times 12 & 12 \times 15 \times 10 \times 8 & 15 \times 12 \times 10 \times 8 & 19 \times 12 \times 15 \times 8 \\
 8 \times 10 \times 12 \times 15 & 12 \times 10 \times 8 \times 15 & 10 \times 15 \times 8 \times 12 & 19 \times 15 \times 8 \times 12 \\
 8 \times 19 \times 15 \times 12 & 12 \times 19 \times 15 \times 8 & 15 \times 19 \times 12 \times 8 & 19 \times 15 \times 12 \times 8
 \end{array}$$

Poichè noi abbiamo dimostrato che li prodotti formati da tre fattori in qualunque maniera ordinati sono tutti eguali, è evidente che tutti li prodotti di quattro fattori, che hanno il medesimo fattore per moltiplicando o per moltiplicatore, debbono essere eguali, e per conseguenza non solo li prodotti, che compongono una medesima colonna sono eguali fra loro, ma bensì tutti li prodotti sono eguali, giacchè in ciascheduna delle colonne si trova sempre un prodotto, che ha per ultimo moltiplicatore il medesimo fattore, che serve di moltiplicando in una delle altre colonne, dal che conchiudiamo che tutti li prodotti sono fra loro eguali.

Così se il primo prodotto $8 \times 12 \times 15 \times 19$, ha per moltiplicando il numero 8, in tutte le altre colonne v'è almeno un prodotto che avrà 8 per ultimo fattore, e poichè i prodotti di tre fattori in qualunque ordine disposti sono tutti eguali, ne segue che in qualunque colonna vi è sempre un prodotto eguale ad $8 \times 12 \times 15 \times 19$.

Con un ragionamento analogo, si potrebbe dimostrare, che la stessa verità avrebbe luogo qualora si avesse un numero maggiore di fattori; dal che conchiuderemo generalmente, che *il prodotto di un numero qualunque di fattori resta costantemente lo stesso, qualunque sia l'ordine secondo il quale essi si moltiplicano.*

26. Qualora si vuole moltiplicare per un dato numero la somma di più numeri dati, basterà moltiplicare per sì fatto numero ciascheduna delle parti di essa; e reciprocamente quando si moltiplica ciascheduna delle parti di una somma per un dato numero, la somma è moltiplicata per lo stesso numero. In fatti per moltiplicare una somma, bisogna prenderla tante volte, quante ne indica il numero delle unità del moltiplicatore, dunque ogni parte sua deve essere presa questo medesimo numero di volte. La reciproca evidentemente si dimostra della medesima maniera.

27. Qualora vogliamo dividere una som-

ma per un numero, basterà dividerla per tale numero ciascuna delle parti di essa; e reciprocamente qualora si dividono per un numero tutte le parti, che compongono una somma, la somma sarà divisa per lo stesso numero.

In fatti quando la somma $7+3$ si divide per 5, essa diviene $7+3$ diviso per 5, ossia 7 diviso per 5 più 3 diviso per 5; quindi ciascuna delle parti è divisa per 5. Similmente quando si dividono per 5 le due parti 7 e 3 noi abbiamo la somma 7 diviso per 5 più 3 diviso per 5, che vale lo stesso che $7+3$ diviso per 5.

2^a. Qualora in una moltiplicazione si accresce il moltiplicatore di qualche numero di unità, il prodotto si troverà aumentato del moltiplicando ripetuto tante volte quante ne indica il numero delle unità aggiunte al moltiplicatore. Similmente se il moltiplicando si accresce di qualunque numero di unità, il prodotto si troverà accresciuto del moltiplicatore ripetuto tante volte quante ne indica il numero delle unità aggiunto al moltiplicando.

Imperocchè il prodotto è composto del moltiplicando ripetuto tante volte, quante ne indica il moltiplicatore, dunque qualora il moltiplicatore è accresciuto di un certo numero di unità, il prodotto deve essere accresciuto del moltiplicando preso tante volte

27

quante unità dipiù si trovano nel moltiplicatore.

Dippiù non alterandosi un prodotto, qualunque sia l'ordine nel quale si moltiplicano li fattori, ne segue che qualora il moltiplicando accresciuto si passa in moltiplicatore ed il moltiplicatore in moltiplicando, si troverà similmente il prodotto accresciuto di tanto quanto è il moltiplicatore ripetuto tante volte quante ne indicano le unità delle quali è stato accresciuto il moltiplicando.

Dal che possiamo ricavare la seguente verità generale. *Qualora in una moltiplicazione uno de' fattori si accresce di un dato numero di unità, il prodotto si trova accresciuto del prodotto, che nasce moltiplicando l'altro fattore per l'accrescimento fatto al fattore variato.*

29. Con un simile raziocinio si dimostra che *qualora in una moltiplicazione si diminuisce uno de' due fattori di un dato numero di unità, il prodotto si diminuisce del prodotto, che nasce moltiplicando l'altro fattore per lo numero delle unità delle quali è stato diminuito il fattore variato.*

30. *In ogni moltiplicazione, qualora uno de' fattori è moltiplicato o diviso per un numero il prodotto è similmente moltiplicato o diviso per lo stesso numero.*

In fatti sia 56 prodotto da 7×8 ; se noi moltiplichiamo il fattore 8 per 3, allora il

fattore 7 sarà moltiplicato per 8×3 , ed il prodotto sarà $7 \times 8 \times 3$, e perciò eguale al prodotto di 7×8 preso 3 volte.

Similmente se il fattore 8 si divide per 3, il prodotto sarà 7 moltiplicato per 8 diviso per 3, ossia 8 volte 7 diviso per 3.

31. Reciprocamente *qualora in una moltiplicazione il prodotto di due fattori è moltiplicato, o diviso per un numero, ed uno de' due fattori non è cambiato, l'altro fattore deve essere similmente moltiplicato o diviso per lo stesso numero, che ha moltiplicato, o diviso il prodotto.*

In fatti sia 56 il prodotto di 7 per 8, se il fattore 7 non varia, e si moltiplichi il prodotto per 2; questo prodotto sarà 7×8 ripetuto 2 volte, ossia $7 \times 8 \times 2$, o ciò che vale lo stesso, che 7 moltiplicato per 8×2 , e perciò il fattore 8 è stato moltiplicato per lo numero 2, che avea moltiplicato il prodotto.

Similmente se il fattore 7 non è alterato, ed il prodotto di 7×8 sarà diviso per 2, il prodotto sarà la metà di 7×8 , ossia ciò che vale lo stesso sarà 7 moltiplicato per la metà di 8; ossia per 8 diviso per 2.

32. Dal che ricaviamo 1. Che *qualora in una moltiplicazione uno de' fattori si moltiplica per un numero nel mentre si divide l'altro fattore per lo stesso numero il prodotto non si varia*: 2. Che *qualora avendo multi-*

29

plicato o diviso uno de' fattori per un numero, il prodotto non è variato, l'altro fattore deve essere reciprocamente diviso o moltiplicato per lo stesso numero.

33. Dopo di esserci occupati delle verità, che riguardano la moltiplicazione, resta ora che da noi si cerchi la regola da seguire per isciorre il problema, *dati due numeri trovare il prodotto della moltiplicazione di essi.*

Due casi possono darsi 1. Che ambi li fattori sieno di una sola cifra: 2. Che li fattori sieno composti da qualsivoglia numero di cifre.

1. *Caso.* Quando li fattori sono di una sola cifra, abbiamo già veduto come si deve operare (§. 22.), ed abbiamo avvertito, che noi supponiamo, che li prodotti si sappiano a mente.

Ora noi dobbiamo far vedere, come si possa fare dipendere la formazione de' prodotti de' fattori composti da un numero qualunque di cifre dalla cognizione de' prodotti de' fattori di una sola cifra.

2. *Caso.* Supponiamo in primo luogo che si voglia moltiplicare il numero 8746 per 8.

Poichè noi dobbiamo trovare un prodotto, il quale contenga 8 volte il numero 8746, la operazione si ridurrà a prendere 8 volte ciascheduna delle parti del moltiplicando 8746, cioè 8 volte le unità, 8 volte le decine, 8

volte le centinaja, ed 8 volte le migliaja del moltiplicando 8746, operazione che riduce la moltiplicazione de' numeri dati ad una serie di moltiplicazioni parziali successive, le quali hanno li fattori di una sola cifra. Ciò posto noi scriveremo il moltiplicatore 8746 e sotto di esso scriveremo il moltiplicatore 8, sotto del quale tireremo una linea per separare li fattori dati dal risultato della operazione, ossia dal prodotto.

Indi diremo 8 volte 6 unità dà 48 unità, ossia 8 unità, e 4 decine, scriviamo le 8 unità sotto la linea, e riteniamo le 4 decine per riunirle al prodotto delle decine, indi diciamo 8 volte 4 decine dà 32 decine, che unite alle 4 decine ritenute formano 36 decine, ossia 6 decine, e 3 centinaja, scriviamo nel prodotto le 6 decine nel luogo delle decine, e riteniamo le 3 centinaja per aggiugnerle al prodotto delle centinaja; indi proseguendo diciamo 7 centinaja ripetute 8 volte danno 56 centinaja, le quali unite alle 3 centinaja ritenute danno 59 centinaja, ossia 9 centinaja e 5 migliaja, scriviamo le 9 centinaja nel luogo delle centinaja del prodotto, e riteniamo le 5 migliaja per riunirle al prodotto delle migliaja: finalmente moltiplichiamo le 8 migliaja per lo moltiplicatore 8, ed avremo 64 migliaja, le quali unite alle 5 migliaja ritenute danno

69 migliaia, che scriviamo interamente alla sinistra delle cifre trovate del prodotto, ed avremo 69968 per lo prodotto dimandato di 8746×8 .

Proponiamci ora di moltiplicare 749 per 368. Poichè il prodotto deve contenere 368 volte il moltiplicando 749, esso lo conterrà 8 volte più 60 volte più 300 volte; quindi la moltiplicazione si riduce a prendere tutte le parti del moltiplicando 749 prima 8 volte, indi 60 volte, ed in fine 300 volte.

Per prendere 8 volte il moltiplicando 749, noi opereremo della stessa maniera secondo la quale abbiamo operato nel caso precedente, e troveremo il primo prodotto parziale 5982, che scriveremo sotto la linea.

$$\begin{array}{r} 749 \\ \times 368 \\ \hline \end{array}$$

$$5982$$

$$44940$$

$$227700$$

$$275622$$

Indi noi dobbiamo prendere 60 volte lo stesso moltiplicando 749, prendendolo soltanto 6 volte, avremo il prodotto 4494, prodotto il quale è nato dal moltiplicando moltiplicato per 6, il quale è 10 volte minore del vero moltiplicatore, quindi il prodotto 4494 è 10 volte minore del prodotto di 749 per 60, e per conseguenza esso deve essere moltiplicato per 10, affinchè acquisti il suo vero valore, locchè noi facciamo aggiugnendo alla sua destra un zero, ed allora avremo 44940 per secondo prodotto parziale,

che noi scriveremo sotto del primo prodotto parziale, facendo sì, che le unità del medesimo ordine di essi si trovino nella medesima colonna verticale.

Finalmente per moltiplicare 749 per 300, noi moltiplicheremo 749 per 3 ed al prodotto 2247, aggiungeremo alla destra due zeri, e lo scriveremo sotto gli altri prodotti parziali, anche facendo sì che le unità del medesimo ordine si trovino situate nella medesima colonna verticale. La somma 265622 di tutti li prodotti parziali sarà evidentemente il prodotto totale dimandato.

Potrebbe darsi il caso che o uno de' fattori, o tutti due fossero terminati alla loro destra da uno, o da più zeri, come per esempio, se il moltiplicando fosse 74900, ed il moltiplicatore 368; oppure se il moltiplicando fosse 74900, ed il moltiplicatore 3680.

Nel primo caso è evidente che moltiplicando 749 per 368, noi facciamo divenire il moltiplicando 100 volte minore di quello, che deve essere, e perciò il prodotto 265622, che così troveremo sarebbe 100 volte minore del prodotto dimandato, e perciò se lo moltiplicheremo per 100, lo che faremo aggiungendo due zeri alla sua destra, noi avremo il prodotto dimandato 26562200.

Nel secondo caso essendo il moltiplicando 74900, ed il moltiplicatore 3680, qualora moltiplichiamo 74900 per 368 avremo

il

il prodotto 26562200 ; il quale è 10 volte minore del vero prodotto dimandato , quindi per ridurlo al suo vero valore noi lo moltiplicheremo per 10 , ossia noi aggiungeremo un zero alla sua destra , ed avremo così il vero prodotto dimandato 265622000.

Finalmente può darsi il caso che tra le cifre significative del moltiplicatore , o del moltiplicando , oppure di tutti due vi fossero uno o più zeri , come sarebbe se noi dovessimo moltiplicare 300008 per 6002 , allora l'operazione si riduce a moltiplicare 300008 per 2 , indi per 6000 , la moltiplicazione per 2 si esegue come abbiamo fatto quì sopra , la moltiplicazione poi per 6000 noi l'eseguiamo moltiplicando prima per 6 , indi moltiplicando il prodotto trovato per 1000 , locchè si esegue mettendo tre zeri alla destra del prodotto trovato , oppure scrivendo la prima cifra del medesimo prodotto sotto la cifra delle migliaia del primo prodotto parziale , e facendo la somma di sì fatti prodotti parziali avremo il prodotto totale dimandato.

Da quanto abbiamo detto noi ricaveremo la seguente regola generale.

34. *Per moltiplicare un numero per un altro si deve scrivere il moltiplicando , e sotto di esso il moltiplicatore , sotto del quale si tirerà una linea Indi incominciando dalla destra si moltiplichì ciascuna cifra del*

moltiplicando per la cifra delle unità semplici del moltiplicatore, ed il prodotto parziale che ne risulta si scriva sotto del moltiplicatore, se moltiplicando una cifra del moltiplicando si ha un prodotto di due cifre si scrive soltanto la prima cifra a destra, e si ritiene quella di sinistra per aggiungerla al prodotto della cifra seguente del moltiplicando moltiplicata per la medesima cifra del moltiplicatore, e si avrà così il primo prodotto parziale. Indi si moltiplicheranno tutte le cifre del moltiplicando successivamente per ciascheduna delle cifre significative del moltiplicatore, avendo l'attenzione di mettere alla destra di ciascuno de' prodotti parziali tanti zeri, quanti ne disegna il luogo che occupa la cifra del moltiplicatore a sinistra di quella delle unità semplici, o ciò che vale lo stesso situare la prima cifra di ciascuno prodotto parziale sotto quella cifra del moltiplicatore che è del medesimo grado. Finalmente si addizionano tutti li prodotti parziali; e la somma che ne risulterà sarà il prodotto totale dimandato.

Se si dà il caso che li fattori abbiano alla loro destra qualche zero, noi potremo eseguire la moltiplicazione facendo astrazione de' zeri, ed alla destra del prodotto, che troveremo aggiungere tanti zeri quanti ne sono alla destra de' fattori.

ARTICOLO III.

Delle elevazioni a potenza.

35. **P**otrebbe darsi il caso, che da noi si dovesse fare la moltiplicazione di più fattori fra loro eguali, allora la moltiplicazione si eseguirebbe in questi casi particolari con la medesima facilità colla quale si è eseguita qualora li fattori sono qualunque, ma poichè ci interessa per la ricerca de' metodi di scomposizione de' numeri, di sapere quale è la legge secondo la quale sono composti li prodotti nati dalla moltiplicazione di fattori eguali, noi cercheremo di scoprirla. Ma per distinguere li prodotti nati dalla moltiplicazione di fattori eguali da quelli che nascono dalla moltiplicazione di fattori diseguali, noi daremo in generale il nome di *potenza*, ai prodotti che nascono dalla moltiplicazione di fattori eguali, e particolarmente qualora queste potenze nascono dalla moltiplicazione di 2, 3, 4 etc. fattori eguali, le chiameremo *potenza seconda o quadrato*, *potenza terza o cubo*, *potenza quarta*, *potenza quinta* etc. e daremo il nome di *radice seconda*, o *radice quadrata*, *radice terza*, o *radice cubica*, *radice quarta*, *radice quinta* etc., al fattore costante, secondocchè esso avrà prodotta la potenza seconda, la potenza terza, la potenza quarta etc.

36. Occupiamoci in primo luogo della composizione del quadrato di un dato numero.

Supponiamo che si cerchi il quadrato della somma $+4$; esso si troverà moltiplicando $5+$ per $5+4$; il quale prodotto ritrovato secondo le regole date sarà eguale a $5+4$ moltiplicato per 5 , più il prodotto dello stesso $5+4$ moltiplicato per 4 . Dunque il quadrato di $5+4$ è com-

$5+4$	
posto dal quadrato di 5 ,	$5+4$
più il prodotto di 5×4	$\frac{\quad}{\quad}$
preso due volte, più il	$5 \times 5 + 5 \times 4$
quadrato di 4 . Dunque il	$+ 5 \times 4 + 4 \times 4$

quadrato della somma di due numeri è eguale alla somma del quadrato del primo di essi, del prodotto del primo per lo secondo preso due volte, e del quadrato del secondo.

Supponiamo che sia proposto il numero 74 composto da 7 decine e 4 unità, esso potrà considerarsi come la somma di 7 decine, ossia di 0 e di 4 unità; quindi il suo quadrato sarà eguale al quadrato delle 7 decine più due volte il prodotto delle 7 decine moltiplicate per le 4 unità, più il quadrato delle 4 unità. Dal che ricaveremo il teorema generale. *Il quadrato di un numero composto da decine e da unità è eguale alla somma del quadrato delle decine, al doppio del prodotto delle decine per le unità, ed al quadrato delle unità.*

In oltre sappiamo, che le decine moltiplicate per le decine danno al prodotto unità di centinaja, che le decine moltiplicate per le unità danno unità di decine al prodotto, ed in fine che le unità moltiplicate per le unità danno unità al prodotto. Dunque *il quadrato delle decine viene in centinaja, il doppio del prodotto delle decine per le unità viene in decine, ed il quadrato delle unità viene in unità.*

Dippiù li quadrati de' numeri 1, 10, 100, 1000 etc. sono 1, 100, 10000, 1000000 etc.; quindi li quadrati de' numeri compresi tra 1 e 10, ossia li quadrati de' numeri di una cifra debbono essere tra 1 e 100, e perciò non possono avere più di due cifre, il quadrato di 10 che è il minimo numero di due cifre essendo 100, ed il quadrato di 100 che è il minimo numero di tre cifre essendo 10000, ne segue che il quadrato di qualunque numero di due cifre deve essere compreso tra 100 e 10000, e per conseguenza deve avere almeno tre cifre ed al più quattro cifre. Similmente si dimostra che un numero di tre cifre non può avere al suo quadrato meno di cinque cifre, nè più di sei, e generalmente che *qualora un numero è composto da n cifre, il suo quadrato non può avere più di $2n$ cifre, nè meno di $2n-1$ cifra.*

37. Sia la medesima somma $5+4$ della

quale si cerca il cubo. Noi avremo il cubo di $5+4$ moltiplicando il quadrato di $5+4$ per $5+4$; ma il quadrato di $5+4$ è $5 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 + 4 \times 4$; dunque il cubo di $5+4$, sarà $5 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 + 4 \times 4$ moltiplicato per $5+4$, ed eseguendo sì fatta moltiplicazione noi troveremo per prodotto

$5 \times 5 \times 5 + 5 \times 5 \times 4 + 5 \times 5 \times 4 + 4 \times 4 \times 5 + 4 \times 4 \times 5 + 5 \times 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4$. Dal che conchiudiamo, che il cubo della somma $5+4$ è eguale a $5 \times 5 \times 5$, ossia al cubo della prima parte, più $5 \times 5 \times 4$ preso tre volte, ossia il triplo del quadrato della prima parte moltiplicato per la seconda, più $4 \times 4 \times 5$ preso tre volte, ossia il triplo del quadrato della seconda parte moltiplicato per la prima, più $4 \times 4 \times 4$, ossia il cubo della seconda parte. Quindi conchiuderemo generalmente, che *il cubo della somma di due numeri è eguale alla somma del cubo del primo numero, del triplo del quadrato del primo moltiplicato per lo secondo, del triplo del quadrato del secondo moltiplicato per lo primo, e del cubo del secondo.*

Quindi se abbiamo un numero composto da decine e da unità, esso potrà essere considerato come la somma fatta dalle sue decine, e dalle sue unità, e per conseguenza il suo cubo sarà composto dal cubo delle decine, dal triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, dal triplo del qua-

29

drato delle unità moltiplicato per le decine, e dal cubo delle unità.

Dippiù essendo il quadrato delle decine composto da centinaja, ne segue che esso moltiplicato per le decine dia al prodotto migliaia. Il quadrato delle decine essendo in centinaja, moltiplicato per le unità verrà in centinaja; il quadrato delle unità essendo in unità qualora sarà moltiplicato per le decine darà il prodotto in decine; e finalmente il cubo delle unità provenendo dal quadrato delle unità, che è in unità, moltiplicato per le unità verrà in unità. Quindi concludiamo generalmente, che *il cubo delle decine di un numero dato viene in migliaia, che il triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità viene in centinaja, che il triplo del quadrato delle unità moltiplicato per le decine viene in decine, ed in fine che il cubo delle unità viene in unità.*

In fine essendo delli numeri 1, 10, 100 etc. li cubi rispettivamente 1, 1000, 1000000 etc. ne segue che il cubo di un numero di una cifra, il quale è compreso tra 1 e 10, deve essere minore di 1000, che è il minimo numero di 4 cifre, dunque esso non può avere più di 3 cifre; un numero compreso tra 10 e 100, che ha per conseguenza due cifre, deve avere il suo cubo compreso tra 1000 e 1000000, e per conseguenza non può avere meno di 4 cifre nè più di 6. Similmente si

dimostra che un numero di tre cifre non può avere al suo cubo meno di 7 cifre nè più di 9, etc. ; ed in generale che *un numero di n cifre non può avere al suo cubo più di $3n$ cifre, nè meno di $3n-2$ cifre.*

38. Ragionando della medesima maniera come abbiamo ragionato per conoscere la composizione del quadrato e del cubo di un numero, noi potremmo conoscere la composizione delle potenze 4^a , 5^a etc. di esso, ma esse divenendo tanto più complicate quanto più alto è il grado della potenza, noi rimetteremo ad un luogo più adattato sì fatta ricerca.

39. Ricapitolando le varie maniere da noi tenute per comporre li numeri, vediamo, che questa composizione da noi si è fatta. 1. Per la successiva addizione dell'unità. 2. Per la addizione di più numeri differenti. 3. Per quella di più numeri fra loro eguali. 4. Per la ripetizione de' numeri ottenuti per mezzo della operazione precedente, ripetizione la quale può essere indicata da numeri diseguali, o da numeri eguali a quelli precedentemente adoperati.

40. Ogni una delle operazioni, per mezzo delle quali noi abbiamo composti li numeri, ha la sua corrispondente qualora vogliamo scomporre li numeri; quindi li problemi che possono proporsi per la scomposizione de' numeri si riducono alli seguenti.

1. *Da un numero dato togliere successivamente l'unità.* 2. *Essendo data la somma di due o più numeri, determinare li numeri che l'hanno prodotta.* 3. *Dato il prodotto di due o più fattori, determinare li fattori.* 4. *Data la potenza di un dato grado, determinare la radice.*

Questi problemi che sono precisamente gli inversi di quelli, che abbiamo scolti relativamente alla composizione de' numeri sono troppo indeterminati, quindi per togliere la indeterminazione noi li modificheremo sottoponendoli a certe date condizioni; così per esempio noi proporremo il secondo, nella maniera seguente. *Data la somma di due numeri ed uno di essi, determinare l'altro.* Il terzo si modificherà dicendo: *Dato il prodotto di due fattori, e, dato uno di essi, determinare l'altro fattore.* Il quarto finalmente si potrà proporre nella seguente maniera: *Data la potenza di un numero e dato il suo grado, determinare la radice corrispondente.*

Della decomposizione de' numeri.

ARTICOLO I.

Della Sottrazione.

41. **S**i dice sottrazione, l'operazione di calcolo per mezzo della quale, qualora ci è nota la somma di due numeri ed uno di essi, noi determiniamo l'altro numero. Ed essendo evidente che qualora si vuole determinare sì fatto numero ignoto, noi dobbiamo togliere dalla somma data il numero dato; quindi diciamo, che si può ancora definire la sottrazione, dicendo, che essa è la operazione di calcolo per mezzo della quale togliendo da un numero maggiore uno minore, si conosce di quanto il maggiore eccede il minore; ed il risultato della sottrazione si chiamerà Residuo, Differenza, o Eccesso.

42. Se la sottrazione si dovesse fare tra due numeri di una sola cifra, essa potrebbe eseguirsi togliendo dal numero maggiore successivamente tutte le unità del numero minore.

La sottrazione de' numeri composti da

più cifre si potrebbe eseguire della medesima maniera, ma qualora il numero da sottrarre fosse molto grande la sottrazione diverrebbe lunga, penosa, e qualche volta inespugnabile, quindi è necessario di trovare un metodo più facile, e più comodo; ma è evidente che questo metodo sarebbe da noi trovato se trovassimo la maniera da fare dipendere la sottrazione de' grandi numeri da quella de' numeri di una sola cifra, il che noi faremo considerando, che il residuo di qualunque sottrazione deve essere composto dalli residui parziali, che si hanno sottraendo successivamente dalli numeri, che esprimono le unità di differenti ordini nel numero maggiore li numeri che esprimono le unità del medesimo ordine nel minore; così per esempio se noi vo- 7898
lessimo sottrarre 3467 da 8798, noi 3467
diremo che il residuo totale è compo-
sto dall' eccesso delle 8 unità del nu- 4431
mero maggiore sulle 7 unità del numero minore, da quello delle 9 decine del primo sopra le 6 decine del secondo; da quello delle 8 centinaja del primo sopra delle 4 centinaja del secondo, ed in fine da quello delle 7 migliaja del primo sopra le 3 migliaja del secondo, locchè facendo noi troviamo, che l' eccesso di 7898 sopra 3467 è 4431.

Ma noi osserveremo, che questo metodo non può essere adoperato qualora accade, che qualcheduna delle cifre del numero mi-

nore eccede la cifra corrispondente del numero maggiore; come ancora quando ad una cifra significativa del numero minore corrisponde il zero nel numero maggiore. Quindi supponiamo

1. Che noi dobbiamo sottrarre 9446
 2897 da 9446 , nel quale caso noi ra- 2897
 gioneremo così.

6549

Dalle 6 unità del numero maggiore noi non possiamo sottrarre 7 unità del minore, ma il numero maggiore oltre delle 6 unità contiene 4 decine, o ciò che vale lo stesso contiene 3 decine e 16 unità, quindi se dalle 16 unità noi ne sottrarremo le 7 del numero minore; noi avremo il residuo 9 che da noi si scriverà sotto la colonna delle unità. Indi diciamo dalle 3 decine del numero maggiore non possiamo sottrarre le 9 decine del minore, ma poichè il numero maggiore contiene 4 centinaia, e 3 decine noi lo possiamo considerare come contenente 3 centinaia e 13 decine, quindi dalle 13 decine togliamo le 9 decine del numero minore, ed il residuo 4 che ne risulta noi lo scriviamo sotto la colonna delle decine; dipoi osserviamo che dalle 3 centinaia del numero maggiore non possiamo sottrarre le 8 centinaia del minore, lo che c'induce a considerare che se in vece di dire che il numero maggiore contiene 3 centinaia e 9 migliaia, noi

diciamo che esso contiene 8 migliaia e 13 centinaja, locchè vale lo stesso, allora sottraendo dalle 13 centinaja le 8 centinaja del numero minore, avremo per residuo 5 centinaja, e la cifra 5 posta sotto la colonna delle centinaja esprimerà le centinaja del residuo, finalmente togliendo dalle 8 migliaia del numero maggiore le 2 migliaia del minore troviamo per residuo 6 migliaia, e dopo di avere scritta la cifra 6 sotto la colonna delle migliaia, noi conosciamo il residuo totale 6549

2. Finalmente proponiamo di sottrarre 3846 da 9002. Volendo eseguire le sottrazioni parziali, noi dovremmo dalle 2 unità del numero maggiore togliere le 6 unità del minore, locchè non può farsi, e vedendo che nel numero maggiore mancano le decine e le centinaja noi ricorriamo alla cifra delle migliaia, indi consideriamo questo numero come se contenesse 8 migliaia in vece di 9, e 10 centinaja, o ciò che vale lo stesso 8 migliaia, 9 centinaja, 9 decine e 10 unità; più le 2 unità del numero dato, ed avremo ridotto il numero dato ad 8 migliaia, 9 centinaja, 9 decine e 12 unità. Indi diremo dalle 12 unità del numero maggiore togliendo le 6 unità del minore avremo il residuo 6, che scriveremo sotto la colonna delle unità, indi da 9 decine togliendo 4 decine avremo per residuo 5 decine, e

scriveremo la cifra 5 sotto la colonna delle decine, di poi da 9 centinaja togliendo 8 centinaja avremo per residuo 1 centinajo, e scriveremo la cifra 1 sotto la colonna delle centinaja, finalmente da 8 migliaja togliremo 3 migliaja, e troveremo per residuo 5 migliaja, quindi dopo di avere scritta la cifra 5 sotto la colonna delle migliaja, noi troveremo il residuo totale 5156

9002

3846

5156

Da quanto abbiamo detto noi ricaveremo la seguente regola generale.

43. Per trovare la parte ignota di una somma quando l'altra è conosciuta, cioè per sottrarre un numero da un altro; 1. Si scriva il numero minore sotto del maggiore in modo che le cifre, le quali esprimono unità della medesima specie sieno situate in una medesima colonna verticale: 2. Indi dalle unità, decine, centinaja ec. del numero maggiore si tolgano le corrispondenti unità, decine, centinaja ec. del numero minore: 3. Se qualcheduna delle cifre del numero maggiore esprimesse un numero di unità minore di quello, che ne esprime la cifra corrispondente del numero minore si aggiunga al numero troppo piccolo una decina, e si diminuisca di una unità la cifra

47
*che segue immediatamente a sinistra, e si
prosegua similmente, notando sempre li re-
sidui parziali sotto le colonne correspon-
denti, il numero che ne risulterà essendo la
somma di tutti li residui parziali, sarà il
residuo totale, ossia la parte incognita della
somma proposta.*

44 Per conoscere in quale maniera la
differenza di due numeri dipende da essi, è
necessario determinare le variazioni che deb-
bono accadere nel residuo, qualora si fanno
variare li numeri dati. Quindi soggiugnere-
mo le seguenti verità.

*I. Qualora in una sottrazione si accre-
sce, o si diminuisce il numero maggiore
senza alterare il numero minore, il residuo
similmente si troverà accresciuto, o dimi-
nuito della stessa quantità, della quale si è
accresciuto, o diminuito il numero maggiore.*

Imperocchè il numero maggiore essendo
la somma del minore e del residuo; se il
numero maggiore aumenta, o diminuisce di
una quantità, anche la somma del minore e
del residuo, la quale deve essere sempre egua-
le al numero maggiore, aumenterà, o dimi-
nuirà della medesima quantità, ma per la
ipotesi il numero minore non varia, dunque
il residuo deve aumentare, o diminuire del-
la medesima quantità.

*II. Qualora in una sottrazione il nume-
ro maggiore non varia, e noi accresciamo,*

o diminuiamo il numero minore di una data quantità, reciprocamente il residuo diminuirà, o aumenterà della medesima quantità.

Imperocchè qualora il numero maggiore non varia, la somma del numero minore, e del residuo, che gli è sempre eguale, non deve variare, ma la somma di due numeri non varia, qualora l'aumento di uno di essi è eguale alla diminuzione dell'altro, dunque qualora il numero minore aumenta di una data quantità, il residuo deve diminuire di altrettanto, e qualora il minore diminuisce, il residuo deve aumentare di tanto, di quanto il numero minore è diminuito; dunque qualora il numero minore di una sottrazione si accresce o si diminuisce senza alterare il numero maggiore, il residuo deve ricevere un cambiamento eguale ed opposto, cioè deve diminuire o aumentare di tanto quanto il minore è stato aumentato, o diminuito.

III. *Qualora in una sottrazione si aggiunge una quantità al numero maggiore, e se ne toglie una altra al numero minore il residuo sarà aumentato della somma delle due quantità.*

Imperocchè questo residuo sarà aumentato di tanto quanto è stato aumentato il numero maggiore, ed ancora di tanto quanto è stato diminuito il numero minore.

IV. *Qualora in una sottrazione, si dimi-*

nu-

nuisce il numero maggiore di una quantità, e si accresce il minore di un'altra quantità, il residuo sarà diminuito della somma delle medesime quantità.

Imperocchè il residuo diminuisce per la diminuzione fatta al numero maggiore di tanto quanto esso è stato diminuito, e per lo accrescimento fatto al numero minore soffre una seconda diminuzione eguale allo aumento fatto al numero minore.

V. Qualora in una sottrazione si accrescono li due numeri della medesima quantità, il residuo non si altera.

Imperocchè per lo aumento fatto al numero maggiore il residuo dovrebbe ricevere un aumento eguale a quello fatto al numero maggiore, nel mentre per l'aumento fatto al numero minore deve ricevere una eguale diminuzione, e perciò esso non si altera.

VI. Qualora in una sottrazione li due numeri si diminuiscono di una medesima quantità, il residuo non si altera.

Imperocchè per la diminuzione fatta al numero minore il residuo dovrebbe diminuire di tanto quanta è la diminuzione fatta al numero maggiore, nel mentre che per la diminuzione fatta al numero minore deve crescere della medesima quantità, e perciò esso non varia.

VII. Le reciproche delle due verità precedenti sono evidenti; cioè qualora la diffe-

renza di due numeri non varia, ed uno di essi si trova accresciuto o diminuito di una data quantità, anche l'altro numero deve essere accresciuto o diminuito della medesima quantità.

45. Qualora si vuole sottrarre un numero da un altro formato dalla unità seguita a destra da tanti zeri, quante sono le cifre del numero, che si deve sottrarre, basterà *sottrarre le unità da 10 e le altre cifre da 9*, calcolo tanto facile, che merita appena il nome di *operazione*; Il residuo, che in questo caso noi troviamo, completando ciò che manca al numero minore per formare una unità dell'ordine immediatamente superiore alle massime unità di esso, ha ricevuto il nome di *complemento aritmetico* del medesimo numero.

46. Poichè le leggi, per le quali le variazioni fatte ne' numeri dati nella sottrazione producono le variazioni nel residuo, ci forniscono li mezzi per rettificare il residuo, qualora si saranno fatte delle variazioni nelli numeri dati, noi siamo indotti a credere, che forse esse potranno condurci a ridurre le sottrazioni, fatte con li metodi ordinarij, a sottrazioni più semplici mediante qualche rettificazione fatta nel residuo. Ma avendo noi osservato, che la sottrazione di un numero da un altro fatto dall'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero è di una

51

somma facilità, noi conchiudiamo che sarebbe sommamente vantaggioso, se potessimo fare dipendere tutte le altre sottrazioni da questa facilissima operazione; quindi ci proponiamo di semplificare il metodo della sottrazione per mezzo de' *complementi aritmetici*.

Proponiamoci di sottrarre 874 da 3548; Per introdurre il complemento aritmetico in questa operazione, osserveremo che il numero 3548 è composto da $1000 + 2548$, somma nella quale la prima parte è l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero minore; quindi noi sottrarremo il numero dato 874 da 1000 prendendone il complemento aritmetico, il quale è 121; ma questo complemento è il residuo trovato togliendo 874 da 1000, nel mentre noi dovevamo trovare il residuo proveniente da 874 sottratto da $1000 + 2548$; quindi affinché il residuo 121 divenga il residuo dimandato dovrà essere accresciuto di 2548; lo che ci darà per lo vero residuo $121 + 2548$ ossia 2669.

Noi avremmo potuto aggiugnere al numero maggiore 1000, ed in vece di sottrarre 874 da 3548, avremmo potuto sottrarlo da $3548 + 1000$; nel quale caso il residuo che noi avremmo trovato sarebbe stato maggiore del vero residuo di 1000, poichè qualora nella sottrazione il numero maggiore si accresce di qualche quantità di residuo si tro-

52
 va aumentato della stessa quantità; dunque sottraendo 874 da $3548 + 1000$, noi avremo il residuo composto del complemento aritmetico 121 accresciuto di 3548; il quale è maggiore del vero residuo dimandato di 1000; quindi noi lo ridurremo al suo vero valore prendendo per residuo $121 + 3548$ diminuito di 1000.

Supponiamo che vogliamo sottrarre il numero 3584 da 5648 numeri composti dal medesimo numero di cifre; in questo caso noi non possiamo scomporre il numero 5648 in due parti, delle quali una sia 1000, per sottrarre da essa il numero minore 3584, e così procurarci il suo complemento aritmetico, quindi essendo in nostra libertà di aggiugnere al numero maggiore qualunque altro numero, purchè il residuo trovato si diminuisca di tanto quanto è l'aumento del numero maggiore, senza che il vero residuo si alteri, noi aggiugneremo 10000 a 5648; ed il numero maggiore sarà cambiato in 15648 indi sottraendo 3584 da $10000 + 5648$, noi ricaveremo il residuo 6416 (che è il complemento aritmetico di 3587) + 5648, ossia 12064, residuo maggiore del vero di 10000, quindi il vero residuo sarà 2064.

Da quanto abbiamo detto ricaviamo la seguente regola generale. Per sottrarre un numero da un altro per mezzo de' complementi aritmetici, si aggiunge al numero mag-

53

giore il complemento aritmetico del numero minore, e la somma che ne risulta si diminuisca di una unità del grado prossimamente superiore al grado delle più alte unità del numero minore.

47. Questo metodo è sommamente vantaggioso qualora si debbono eseguire più addizioni, e sottrazioni successive; quindi ci proponiamo di sottrarre più numeri da più altri facendo uso de' complementi aritmetici.

Proponiamoci di sottrarre li numeri 3585, 697, 85 dalli numeri 8349, 958, 96. Per fare l'operazione col metodo ordinario, noi faremo la somma de' numeri 8349, 958, 96; indi faremo la somma de' numeri 3585, 697, 85; ed in fine dalla prima somma noi sottrarremo la seconda.

Ma noi osserveremo, che noi potremmo ottenere il medesimo residuo totale prendendo successivamente le differenze, che passano tra li numeri che debbono sottrarsi, e quelli delli quali essi debbono essere sottratti, paragonandoli a due a due; lo che si ridurrebbe a prendere la differenza tra 8349 e 3585, tra 958 e 697, tra 96 e 85; e di fare la somma di tutte queste differenze trovate; ma queste differenze parziali si possono facilmente trovare per mezzo de' complementi aritmetici, facendo però attenzione, che il residuo totale deve essere rettificato dagli errori prodotti dai complementi aritmetici de' quali si è fatto uso.

Quindi noi scriveremo, come qui a fianco, gli uni sotto gli altri li tre numeri

8349, 958, 96; in modo che la unità del medesimo grado si trovino nella medesima colonna verticale, indi scriveremo sotto di essi li complementi de' numeri

8349
958
96
6416
303
15

3584, 697, ed 85; ed in fine faremo la somma di questi sei numeri,

16137 *Resid. non rettific.*
5037 *Residuo rettific.*

dalla quale toglieremo 10000 per lo errore commesso nel complemento aritmetico di 3584, toglieremo 1000 per lo errore commesso nel complemento di 697, ed in fine toglieremo 100 per lo errore commesso nel complemento di 85; lo che fatto avremo 5037, che sarà il residuo totale.

Da quanto abbiamo detto ricaviamo la seguente regola generale. Qualora si vuole sottrarre la somma di più numeri della somma di più altri, basterà *sommare li complementi aritmetici de' numeri, che debbono essere sottratti con li numeri, dalli quali essi debbono essere sottratti, e togliere dalla somma totale, per ciascheduno de' complementi adoperati, una unità del grado immediatamente superiore al grado delle più alte unità del numero, di cui si è preso il complemento aritmetico.*

48. Per rendere più comoda la operazione della sottrazione per mezzo de' complementi aritmetici, noi disporremo l'operazione come stà qui a fianco dinotando col segno $\bar{1}$ che la cifra 1 deve essere sottratta; così dovendo sottrarre 3584 da 5648 noi disporremo il calcolo così

$$\begin{array}{r} 5648 \\ \bar{1}6416 \\ \hline \end{array}$$

+ 2064 *Residuo rettificato*

Se ci proponessimo di sottrarre la somma di 3589, 667, 85 dalla somma di 8349, 398, 96; noi opereremo come qui sotto

$$\begin{array}{r} 8349 \\ 358 \\ 96 \\ \bar{1}6411 \\ \bar{1}303 \\ \bar{1}15 \\ \hline \end{array}$$

4432 *residuo rettificato*

49. Dopo di avere sciolto il problema *data una somma, ed una delle sue parti determinare l'altra parte*, ci resta a sciogliere il problema inverso della moltiplicazione, cioè *dato il prodotto di una moltiplicazione, e dato uno de' fattori determinare l'altro fattore*, operazione che ha ricevuto il nome di *divisione*.

Della Divisione.

50. **S**i dà il nome di divisione a *quella operazione di calcolo, per la quale noi cerchiamo di conoscere uno de fattori di una moltiplicazione, qualora sono dati il prodotto di essa, e l'altro fattore.* Il prodotto dato si chiama *dividendo*, il fattore noto *divisore*, e si dà il nome di *quoziente* al fattore ignoto, che noi ci proponiamo di scoprire.

51. Qualora il dividendo è un numero concreto possono darsi due casi: 1. Che il divisore sia un numero della medesima specie del dividendo: 2. Che il dividendo ed il divisore sieno di specie differente.

Nel primo caso il divisore è evidentemente il moltiplicando, poichè abbiamo dimostrato, che in qualunque moltiplicazione il prodotto è essenzialmente della medesima natura del moltiplicando, ed il quoziente sarà il moltiplicatore, ma noi abbiamo dimostrato che in ogni moltiplicazione il moltiplicatore è essenzialmente un numero astratto, dunque in questo caso il quoziente è un numero astratto; e per conseguenza in questo caso la divisione serve per farci conoscere il rapporto, che passa fra il dividendo, ed il

divisore, cioè per farci conoscere, quante volte il dividendo contiene il divisore.

Nel secondo caso le unità del dividendo essendo di una natura differente da quella delle unità del divisore, ne segue che il divisore non può essere il moltiplicando, e perciò esso sarà il moltiplicatore, e per conseguenza il fattore ignoto ossia il quoziente sarà il moltiplicando, ma il moltiplicando deve essere della medesima natura del prodotto, dunque il quoziente deve essere della medesima natura del dividendo; dal che ricaviamo, che in questo caso il quoziente determina quella parte del dividendo, la quale ripetuta tante volte quante ne indica il divisore, riproduce il dividendo; ed in questo caso la divisione ci conduce a spartire il dividendo in tante parti eguali quante ne indica il divisore, ed a determinare la grandezza di una di sì fatte parti.

Or se noi consideriamo tutti li numeri della divisione come numeri astratti, la operazione si riduce a vedere quante volte il divisore si contiene nel dividendo, per avere quel numero pel quale moltiplicando il divisore si riproduce il dividendo, senza però potere decidere sulla natura delle unità del quoziente; ma se noi ricorriamo alla quistione proposta, subito decideremo della natura di esse; imperocchè se noi troviamo nella quistione proposta il dividendo ed il diviso-

re della medesima natura, conchiudiamo che il quoziente è un numero astratto, e che la divisione ha servito per farci scovrire il rapporto, che passa tra'l dividendo ed il divisore. Se poi nella divisione proposta il dividendo ed il divisore sono di differente natura, conchiuderemo, che le unità del quoziente sono della medesima natura di quello del dividendo, e che per conseguenza la divisione ci ha condotto a spartire il dividendo in tante parti eguali quante ne indica il divisore, ed a farci conoscere il quoziente, il quale determina il valore di una di sì fatte parti.

52. Da quanto abbiamo detto ricaviamo, che qualunque sia la natura delle unità del dividendo, e del divisore, noi possiamo operare sopra di essi come se fossero numeri astratti, e dopo di avere trovato il quoziente in unità astratte, ricorrere alla quistione per decidere sulla natura di esse, ma poichè supponendo, che tutti li numeri della divisione sieno astratti, la operazione si riduce a trovare per quoziente quel numero, che moltiplicato per lo divisore riproduce il dividendo, la divisione si ridurrà a vedere quante volte il divisore si contiene nel dividendo, dunque in ambi li casi la divisione si ridurrà alla operazione per la quale, dato un dividendo ed un divisore si cerca un numero chiamato quoziente, il quale deter-

mini il numero delle volte, che il dividendo contiene il divisore, quoziente il quale evidentemente può essere determinato per mezzo della sottrazione più volte ripetuta, poichè sottraendo successivamente il divisore dal dividendo, il numero delle sottrazioni fatte per arrivare al residuo zero, indicherà quante volte il dividendo contiene il divisore, e sotto questo aspetto la divisione non sarebbe una nuova operazione di calcolo; ma poichè spesso volte accade, che il divisore si contiene nel dividendo un grande numero di volte, spesso accaderà ancora, che la divisione eseguita secondo questo processo sarà una operazione lunga, penosa, e qualche volta anche insequibile, ne segue che noi siamo necessitati a ricercare un metodo per eseguire questa operazione, il quale sia molto più breve, e più comodo.

Proponiamoci per esempio di dividere 3110348 per 842. Noi ci accorgiamo subito che in questo caso la operazione eseguita per mezzo delle successive sottrazioni sarebbe lunga, e penosa, per una considerazione molto semplice noi vediamo, che il numero delle successive sottrazioni può rendersi molto minore; in fatti se in vece di sottrarre 842 da 3110348, noi rendiamo il numero 842 il più grande possibile relativamente al numero 3110348, allora sottraendo sì fatto numero da 3110348 una sola volta, avremo sottratto il numero 842 tante volte quante ne

indica il numero, per cui esso è stato moltiplicato, poichè il numero 842 si conterrebbe questo numero di volte in 3110348, quindi se per rendere più facili queste moltiplicazioni noi scriviamo alla destra di 842 tanti zeri, quanti ve ne possono essere senza che esso ecceda il dividendo (lo che eseguiremo scrivendo 842 sotto le prime cifre a sinistra del dividendo come se dovesse essere sottratto dalla parte corrispondente del dividendo, ed aggiugnendo alla destra di esso altrettanti zeri, quanto è il numero delle cifre restanti del dividendo), allora noi sottrarremo 842000 da 3110348, ed avremo per residuo 2268348, e conchiuderemo che il dividendo contiene 1000 volte il divisore col residuo 2268348.

Operando sopra questo residuo della medesima maniera come

abbiamo operato sopra	3110348		1000
del dividendo, avremo	842000		1000
per secondo residuo	2268348		1000
1426348, e conchiuderemo che il dividendo	842000		100
contiene il divisore	1426348		etc.
2000 volte col residuo	842000		
1426348, facendo similmente una terza sot-	584248		
trazione avremo per	84200		
residuo 584348; quindi conosciamo, che il	500348		
numero dato contiene	etc.		

il divisore 3000 volte, col residuo 584348, al quale giunti ci accorgiamo, che non si può scrivere il divisore 842 sotto le tre prime cifre del dividendo, poichè 842 è maggiore di 584, talmente che mettendo tre zeri alla destra di 842, dovremmo sottrarre un numero maggiore da un numero minore, quindi noi avanderemo questo numero di una cifra verso la destra, e dopo di avere aggiunto alla sua destra due soli zeri, sottraiamo 84200 dal terzo residuo, ed avremo per quarto residuo 500348, e conchiuderemo che il divisore si contiene nel dividendo 3100 volte col residuo 500348.

Proseguendo della medesima maniera, noi troveremo successivamente il numero delle centinaia, quello delle decine, e quello delle unità di volte, che il dividendo contiene il divisore.

53. Ma questa maniera di operare, quantunque più semplice, è ancora troppo lunga, quindi per renderla più semplice, bisognerebbe evitare di fare più volte la sottrazione delle unità della medesima specie; così nell'esempio precedente, sarebbe stato necessario determinare per una operazione sola il numero delle migliaia di volte, che il divisore 842 si contiene nel dividendo 3110348, lo che si sarebbe da noi ottenuto, se invece di scrivere 842, si fosse scritto il triplo di esso, cioè 2526, cioè se da noi si fosse mul-

moltiplicato 842 per un numero che desse per prodotto il numero, che fosse più prossimo possibile di 3110, cioè qualora si fosse moltiplicato il divisore 842 per lo numero delle volte, che esso può essere contenuto in 31203; ma un numero non può essere contenuto in un altro un numero di volte maggiore di quello che indica quante volte le più alte unità dell'uno si contengono in quelle del più alto grado dell'altro; dunque cercando sì fatto numero di volte, avremo il più alto moltiplicatore di 842; e se questo moltiplicatore si trovasse troppo grande, noi lo diminuiremo successivamente di una unità, fino a tanto che il prodotto di 842 per sì fatto moltiplicatore potrà essere sottratto dalla parte del dividendo, sotto la quale sarebbe stato situato il divisore 842.

Ciò posto, ritorniamo all'esempio precedente, e cerchiamo di trovare il numero delle volte, che il dividendo 3110348 contiene il divisore 842, facendo il minimo numero possibile di sottrazioni.

Scriviamo il dividendo 3110348, ed alla sua destra scriviamo il divisore 842, separandolo dal dividendo per mezzo di una linea verticale, e tiriamo una linea sotto del divisore per notare il quoziente sotto di essa.

Indi prendiamo alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne bisogna, affinchè si abbia un

$$\begin{array}{r}
 3110348 \quad 842 \quad 63 \\
 2526000 \quad \text{---} \\
 \hline
 584348 \quad 3694 \\
 505200 \quad \text{---} \\
 \hline
 79148 \\
 75780 \quad \text{---} \\
 \hline
 3368 \\
 3368 \quad \text{---} \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

numero, il quale contenga il divisore 842; nel caso presente ne bisogna quattro; di poi cerchiamo un numero, per la quale moltiplicando 842, si abbia per prodotto un numero, il quale sia il più prossimo possibile di 3110, questo moltiplicatore non potendo eccedere il numero delle volte, che 3110 contiene 842 o che 3100 contiene 800, o che 31 contiene 8, noi conchiuderemo, che esso è il numero 3, e poichè 2526 prodotto di 842 moltiplicato per 3 è minore di 3110, lo scriveremo sotto 3110 aggiugnendo alla sua destra tre zeri, e con questa operazione noi conosciamo, che il dividendo dato contiene 3000 volte il divisore 842, quindi noi scriveremo sotto del divisore 842 la cifra 3, che indicherà il numero delle migliaia delle volte, che il dividendo contiene il divisore;

ed in fine facendo la sottrazione avremo il residuo 584338, sopra del quale opereremo della stessa maniera secondo la quale abbiamo operato sopra del dividendo dato.

Noi siamo obbligati a prendere sopra questo residuo quattro cifre, poichè 584 è minore di 842, e per conseguenza noi ci accorgiamo, che questo numero non può essere moltiplicato se non se per un numero di centinaia, e per determinare questo moltiplicatore, noi osserveremo, che il 5843 non può contenere 842 un numero di volte maggiore di quello che 58 contiene 8, cioè 7 volte, e che bisogna verificare questo numero 7; quindi moltiplicheremo sia a mente, sia per iscritto 842 per 7, e poichè il prodotto 5894, che ne risulta è maggiore di 5843, noi proveremo il moltiplicatore 6, il quale dando per prodotto 5052, numero minore di 5843, conchiuderemo che 505200 è il massimo numero contenuto nel primo residuo, e scriveremo 6 centinaia alla destra della cifra 3 del quoziente.

Dopo che avremo sottratto 505200 dal primo residuo, noi avremo per secondo residuo 79148; e poichè non possiamo sottrarre 842 da 791, concludiamo, che bisogna prendere quattro cifre del residuo, e che per conseguenza non possiamo moltiplicare il divisore 842 se non se per un numero di decine; e per cercare sì fatto numero noi cerchia-

65
chiamo ancora il numero delle volte, che 8 è contenuto in 79, e troviamo che si fatto numero è 9, e poicchè verificando questo numero 9 troviamo che il prodotto 75780, che nasce moltiplicando 842 per 9 è minore di 79148, mettiamo 9 alla destra del quoziente, e sottraiamo 75780 da 79148, ed avremo il residuo 3368.

In fine operando sopra questo residuo come abbiamo operato sopra de' residui precedenti, troviamo che quattro volte 842 dà per prodotto 3368, il quale è il massimo numero, che possa essere sottratto dall'ultimo residuo, noi scriveremo la cifra 4 alla destra del quoziente, e sottrarremo dall'ultimo residuo trovato il numero 3368, e troveremo per residuo finale il zero. Dal che concludiamo che il dividendo 3110348 contiene 3694 volte il divisore 842, e che per conseguenza 3694 è il quoziente dimandato.

Dal che ricaviamo la seguente regola.
Qualora si deve dividere un numero per un altro, si scriva il divisore a destra del dividendo, e si separi l'uno dall'altro per mezzo di una linea verticale. Indi si prendano alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne bisognano, affinchè la loro unione formi un numero, che possa contenere il divisore; ed avremo così un primo dividendo parziale. Dipoi cerchiamo il numero delle volte che questo dividendo parziale con-

tiene il divisore, locchè più comodamente faremo cercando quante volte la cifra delle più alte unità del divisore è contenuta nella prima cifra del dividendo parziale; se esso ha tante cifre quante ne ha il divisore, e nelle due prime cifre del dividendo parziale se esso ha più cifre del divisore.

Quando avremo in questa maniera trovata la prima cifra del quoziente dobbiamo verificarla, e perciò moltiplicheremo per essa il divisore, facendo questa moltiplicazione a mente, oppure scrivendola, e se troviamo che il prodotto che ne risulta può essere sottratto dal primo dividendo parziale, mettiamo sì fatta cifra al quoziente, altrimenti la diminuiamo di una unità, e la verifichiamo di nuovo, e così continuiamo fino a tanto che il prodotto ritrovato possa essere sottratto dal dividendo parziale. Questa sottrazione darà un residuo, alla destra del quale abbasseremo la cifra seguente del dividendo totale, ed avremo così il secondo dividendo parziale, sopra del quale opereremo come abbiamo operato sopra del primo, la cifra data da questa seconda divisione parziale si scriva a destra della prima cifra del quoziente e si proceda avanti formando tanti dividendi parziali, quante sono nel dividendo totale le cifre che debbono abbassarsi, locchè darà il quoziente totale, il quale sarà composto da tante cifre quante sono state le divisioni parziali.

Nel caso però che qualcheduno de' dividendi parziali si trovasse minore del divisore, noi metteremo un zero al quoziente, e passeremo ad operare sul dividendo parziale seguente.

In fine se dopo di avere abbassate tutte le cifre del dividendo, e dopo di avere per conseguenza trovata l'ultima cifra del quoziente, ci resti ancora un residuo; noi conchiuderemo, che il dividendo era la somma del prodotto del divisore per lo quoziente trovato, e di sì fatto ultimo residuo; in modo che volendo verificare il quoziente trovato, bisognerà moltiplicarlo per lo divisore, ed al prodotto aggiugnere l'ultimo residuo, e questa somma dovrà riprodurre il dividendo.

54. Qui è buono d'avvertire, che poichè ciascheduna delle cifre del dividendo, che si abbassa dà un nuovo dividendo parziale, il quoziente deve avere tante cifre quante ne indica il numero delle cifre; che restano nel dividendo totale dopo fatta la prima divisione accresciuto di una unità. 2. Che nessun quoziente parziale può essere maggiore di 9, che è il massimo numero di una cifra. 3. Che per isfuggire gli errori giova segnare con un punto ciascheduna delle cifre, che si abbassa. 4. Che in ogni divisione il dividendo è eguale alla somma del prodotto del quoziente moltiplicato per lo divisore, e del residuo.

55. Per conoscere le relazioni che esistono tra il dividendo, il divisore, ed il quoziente, è necessario vedere quali sono le variazioni, che si producono nel quoziente, in conseguenza di quelle che accadono nel dividendo, o nel divisore, o in ambidue, quindi dimostreremo le seguenti verità.

1. *Qualora in una divisione si aumenta, o si diminuisce il dividendo senza alterare il divisore corrispondentemente si accresce, o si diminuisce il quoziente:*

Imperocchè quando il dividendo diviene maggiore esso contiene più volte il divisore, e qualora esso diviene minore contiene il divisore un numero minore di volte.

2. *Qualora si aumenta, o diminuisce il divisore senza alterare il dividendo, il quoziente reciprocamente diviene minore, o maggiore.*

Poicchè qualora il divisore diviene maggiore esso è contenuto nel dividendo un numero di volte minore, e qualora esso diviene minore si contiene nel dividendo un numero di volte maggiore.

3. *Qualora si moltiplica, o si divide il dividendo per un numero senza variare il divisore, il quoziente è similmente moltiplicato, o diviso per lo stesso numero.*

In fatti quando non variando il divisore si moltiplica, o si divide il dividendo per un numero, il prodotto del divisore per lo

quoziante , il quale è uguale al dividendo , deve essere moltiplicato per lo stesso numero ; dunque non essendo variato uno de' fattori di questo prodotto , l'altro fattore deve essere moltiplicato , o diviso per lo stesso numero ; ma per la ipotesi il fattore non variato è il divisore , dunque il quoziante , che è l'altro fattore deve essere moltiplicato , o diviso per lo stesso numero , per cui è stato moltiplicato , o diviso il dividendo.

4. *Qualora si moltiplica , o si divide il divisore per un numero senza variare il dividendo , il quoziante sarà reciprocamente diviso , o moltiplicato per lo stesso numero.*

In fatti qualora il prodotto di una moltiplicazione non varia , ed uno de' fattori è moltiplicato o diviso per un numero l'altro fattore deve essere diviso , o moltiplicato per lo stesso numero ; quindi qualora il dividendo , il quale è il prodotto del divisore per lo quoziante non varia , ed il divisore che è uno de' fattori è moltiplicato , o diviso per un numero , il quoziante , che è l'altro fattore , deve essere diviso , o moltiplicato per lo stesso numero.

5. *Qualora si moltiplicano , o si dividono nel medesimo tempo sì il dividendo che il divisore per un medesimo numero , il quoziante non si altera.*

Imperocchè qualora il dividendo si moltiplica , o si divide per un numero , il quo-

ziente è similmente moltiplicato, o diviso per lo stesso numero, e qualora pe' l' medesimo numero si moltiplica, o si divide il divisore, il quoziente è diviso, o moltiplicato per lo stesso numero; dunque il quoziente essendo da una parte moltiplicato per un numero, e dall'altra parte diviso per lo stesso numero, non dee variare.

6. Noi abbiamo dimostrato che qualora in una moltiplicazione si accresce o si diminuisce il moltiplicatore, similmente si accresce, o si diminuisce il prodotto; dippiù noi sappiamo, che qualora il moltiplicatore è l'unità, il prodotto è eguale al moltiplicando; dunque qualora il moltiplicatore è maggiore dell'unità, il prodotto è maggiore del moltiplicando, e qualora il moltiplicatore è minore della unità, il prodotto è minore del moltiplicando. Quindi

7. Potendosi considerare il dividendo come il prodotto, il divisore come il moltiplicatore, ed il quoziente come il moltiplicando, noi conchiuderemo che *qualora il divisore è l'unità, il quoziente è eguale al dividendo.* 2. *Qualora il divisore è maggiore dell'unità, il dividendo è maggiore del quoziente.* 3. *Qualora il divisore è minore della unità, il dividendo è minore del quoziente.*

8. *Qualora il dividendo è zero, ed il divisore è un numero, il quoziente è zero.* Imperocchè dovendo il dividendo essere egua-

71
le al divisore moltiplicato per lo quoziente;
ne segue che il divisore essendo un numero,
il quoziente deve essere necessariamente ze-
ro, imperocchè qualunque numero multipli-
cato per zero, dà zero al prodotto.

9. *Dunque il zero è divisibile per qua-
lunque numero, e dà zero per quoziente.*

10. *Qualora il dividendo è un numero,
ed il divisore è zero; la divisione è inese-
guibile.* Imperciocchè se la divisione fosse
eseguibile, il quoziente dovrebbe essere tale,
che, moltiplicato per lo divisore zero, ripro-
ducesse il dividendo, che è un numero, ma
il zero moltiplicato per qualunque numero
produce sempre zero; dunque qualora qua-
lunque numero si deve dividere per zero la
divisione è inesequibile, poichè non vi è nu-
mero, che moltiplicato per lo divisore zero
possa riprodurre il dividendo.

Quì giova avvertire che spesso noi di-
ciamo, che il quoziente di un numero diviso
per lo zero è l'infinito, locchè vale lo stes-
so, che se dicessimo, che è impossibile di ese-
guire sì fatta divisione, giacchè è impossibile
di trovare il massimo de' numeri, o sia il
numero infinitamente grande. Del resto av-
vertiremo, che noi siamo condotti a dire, che
il quoziente di un numero diviso per lo ze-
ro è eguale all'infinito, dal considerare che
qualora in una divisione il dividendo è un
numero, il quale continuamente decresce, il

quoziente deve continuamente aumentare, e che per conseguenza qualora il divisore è giunto al zero, che è il limite delle quantità decrescenti, il quoziente deve essere il limite delle quantità crescenti, il quale è l'infinito.

11. *In fine qualora il divisore, ed il dividendo sono ambidue zero, il quoziente è indeterminato, o ciò che vale lo stesso qualora si deve dividere lo zero per lo zero, il quoziente può essere qualsivoglia numero. Imperocchè qualunque numero moltiplicato per lo divisore zero, riproduce il dividendo, che ancor esso è zero.*

12. *Qualunque numero terminato alla sua destra per una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8 è un numero pari, cioè è un numero divisibile esattamente per 2.*

Imperocchè questo numero può sempre essere considerato come diviso in due parti, delle quali una contenga tutte le decine, e l'altra le unità, per esempio sia il numero $354 = 350 + 4 = 35 \times 10 + 4$, di queste due parti la prima cioè 35×10 è evidentemente divisibile per 2, poichè il fattore 10 è divisibile per 2, il 4 è anche divisibile per 2; dunque tutto il numero 354 è esattamente divisibile per 2.

13. *Qualunque numero terminato alla sua destra per zero, o per 5, è divisibile per 5.*

(Sia per esempio il numero 375, esso

potrà dividersi in due parti, una delle quali contenga tutte le decine, e l'altra le unità, avremo $375 = 370 + 5 = 37 \times 10 + 5$; ma 37×10 è divisibile per 5, giacchè il fattore 10 è divisibile per 5, ed il 5 è divisibile per se medesimo; dunque 375 è esattamente divisibile per 5.

14. *Qualunque numero, il quale ha la somma delle sue cifre eguale ad un multiplice di 9 è esattamente divisibile per 9.*

Sia per esempio il numero 7434, nel quale la somma delle cifre è un multiplice di 9.

Il numero $7434 = 7000 + 400 + 30 + 4$. Ma noi sappiamo che li numeri 10, 100, 1000, etc. divisi per 9 danno per residuo l'unità; dunque nel numero dato dividendo le migliaia per 9 avremo 7 per residuo, dividendo per 9 le centinaia avremo per residuo 4, dividendo similmente le decine per 9 avremo per residuo 3, e dividendo in fine le unità per 9 avremo per residuo 4; dunque tutte le parti componenti il numero dato sarebbero state divise per 9 se non si fossero avuti li residui 7, 4, 3, 4, ma la somma di questi residui è 18, la quale è divisibile per 9, dunque tutto il numero dato è divisibile per 9; ma li residui avuti dividendo per 9 le migliaia, le centinaia, le decine, e le unità del numero dato sono espressi dalle cifre medesime delle migliaia, delle centinaia, delle decine, e delle unità.

del numero medesimo; dunque qualora la somma delle cifre di un numero è un moltiplice di 9, il numero è divisibile esattamente per 9.

15. Con un simile raziocinio si può dimostrare, che *qualora un numero ha la somma delle sue cifre eguale ad un moltiplice di 3, il numero è esattamente divisibile per 3*.

16. Possiamo qui avvertire che qualora un numero è divisibile per 9, il quale è un moltiplice di 3, è ancora divisibile per 3, e che non tutti li numeri divisibili per 3 sono divisibili per 9.

A R T I C O L O III.

Ricerca di tutti li divisori di un numero intero.

56. **U**n numero si dice *divisore* di un altro qualora esso divide l'altro esattamente.

57. Si dice *numero primo*, o *semplice* qualunque numero, il quale è divisibile esattamente soltanto per l'unità, e per se medesimo.

Così, per esempio, 13 è un numero primo, poichè esso non ha altri divisori all'infuori di se medesimo, e della unità.

58. Si dice *numero composto*, o *non*

primo qualunque numero il quale, oltre l'unità, e se medesimo, ha qualche altro divisore.

Così 15 è un numero composto, poichè ha per divisori se medesimo, l'unità, ed i numeri 3, e 5.

59. Due, o più numeri interi fra essi paragonati sono detti *numeri primi fra essi*, qualora non hanno alcun divisore comune diverso dalla unità.

Così 8 e 15 sono numeri primi fra loro, poichè essi non hanno alcun divisore comune all'infuori dell'unità.

60. Due o più numeri interi fra loro paragonati sono detti *non primi*, o *composti fra loro*, qualora oltre l'unità hanno qualche altro fattore comune.

Così 12 e 15 sono numeri non primi fra loro, giacchè hanno per loro comune divisore il numero 3.

61. Spesso li calcoli, che noi dobbiamo eseguire sopra de' numeri ricercano, che noi li scomponiamo ne' loro fattori primi, e che da noi si conoscano tutti li divisori di essi; perciò proponiamoci in primo luogo di *decomporre un numero dato ne' suoi fattori primi*, sia il numero 360, e proponiamoci di decomporlo ne' suoi fattori primi.

Essendo il numero 2 il primo numero semplice della serie naturale, tentiamo la divisione di 360 per 2, e poichè la divisione riesce

esattamente, e dà per quoziente 180, noi conchiuderemo, che 2 è uno de' fattori primi di 360; dappiù in qualunque divisione essendo il dividendo eguale al quoziente moltiplicato per lo divisore, avremo $360 = 2 \times 180$; se tentiamo la divisione di 180 per 2, noi troviamo, che la divisione si fa anche esattamente, e dà per quoziente 90, quindi avremo $180 = 2 \times 90$; e sostituendo 2×90 in vece di 180, noi avremo $360 = 2 \times 2 \times 90$; tentando ancora la divisione di 90 per 2, la divisione si esegue esattamente, e dà per quoziente 45; dal che conchiudiamo, che $90 = 2 \times 45$, e sostituendo avremo $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$. Se ora tentiamo la divisione di 45 per 2, vediamo che essa non si esegue esattamente; quindi ricorriamo al secondo de' numeri primi della serie naturale, che è il numero 3, e tentando la divisione di 45 per 3, vediamo che essa si esegue esattamente, e dà per quoziente 15; dal che conchiudiamo, che $45 = 3 \times 15$, e sostituendo avremo $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$, e poichè 15 è ancora esso divisibile per 3, e la divisione dà per quoziente 5; conchiuderemo che $15 = 3 \times 5$, e sostituendo avremo $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, e poichè 5 è un numero primo; conchiuderemo, che 360 è stato decomposto ne' suoi fattori primi, li quali sono 2, 2, 2, 3, 3, 5. Facendo uso di un simile raziocinio noi potremo decomporre qualsivoglia altro numero ne' suoi fat-

tori primi; quindi ricaviamo la seguente regola generale. 27

62. Qualora si vuole decomporre un numero intero ne' suoi fattori primi, esso si divida successivamente per 2 tante volte quante si può, indi si veda se l'ultimo quoziente trovato è divisibile per 3, nel quale caso esso si divida successivamente per 3 quante volte è possibile, e similmente si proceda avanti mettendo alla pruova successivamente gli altri numeri primi 5, 7, 11 etc. fino a tanto che si ottenga per quoziente l'unità, ed allora il numero dato sarà stato decomposto ne' suoi fattori primi.

Il calcolo si vuole disporre come qui sotto per potere più comodamente distinguere i fattori.

360		2	110		2
180		2	55		5
90		2	11		11
45		3	1		
15		3			
5		5			
1					

63. Se ci proponiamo di trovare tutti li divisori tanto semplici quanto composti di un dato numero intero, noi incominceremo dal decomporre il numero dato nelli suoi fattori semplici per mezzo della regola precedente, indi moltiplicheremo li fattori

semplici trovati a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4, etc. rigettando que' divisori, che sono eguali ad altri divisori già trovati.

Proponiamoci di trovare tutti li divisori di 90.

Determiniamo per mezzo della regola data tutti li divisori semplici di 90, essi saranno 2, 3, 3, 5; indi per trovare li divisori composti moltiplichiamo il primo divisore semplice 2 per lo secondo 3, ed avremo il divisore 6; dipoi moltiplichiamo lo stesso 2 per lo terzo divisore semplice, cioè per lo secondo 3, e poichè il prodotto di questa moltiplicazione darebbe per divisore anche 6, noi lo rigetteremo poichè esso è stato già trovato; e passeremo alla moltiplicazione dello stesso 2 per lo quarto divisore semplice 5, ed otterremo l'altro divisore 10. Indi moltiplicheremo il secondo divisore semplice, cioè il primo 3 per gli seguenti divisori semplici 3, 5, ed otterremo gli altri divisori 9, 15. Finalmente noi dovremmo moltiplicare il terzo divisore semplice, cioè il secondo 3 per l'ultimo 5; ma come esso darebbe il divisore 15 da noi già trovato; lo rigetteremo.

E' evidente che in questa maniera noi abbiamo trovati non solo tutti li divisori primi del numero dato 90, ma ancora tutti quelli, che nascono moltiplicando tali divisori semplici a 2, a 2. Passiamo ora a deter-

minare tutti li divisori composti, che nascono dalla moltiplicazione de' divisori semplici moltiplicati a 3 a 3. Per ciò fare moltiplichiamo il prodotto de' primi due fattori semplici 2, 3, cioè 6 per lo secondo 3, ed avremo il divisore 18; indi moltiplichiamo lo stesso 6 per l'ultimo divisore semplice 5, ed avremo il divisore 30; e poichè il prodotto dello stesso 2 per lo secondo 3, e per 5 darebbe di nuovo il 30 già trovato lo rigettiamo; e passiamo a moltiplicare li tre ultimi divisori semplici, cioè 3, 3, 5, ed avremo il divisore 45; ed avremo così trovati tutti li divisori di 90, che nascono moltiplicando li suoi divisori semplici a 2 a 2, ed a 3 a 3. E poichè il prodotto de' quattro divisori semplici 2, 3, 3, 5 dà evidentemente il numero dato 90; noi conchiuderemo che tutti li divisori del numero dato 90 sono 1, 2, 3, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

64. La ricerca di tutti li divisori comuni di più numeri dati sarebbe sufficiente per farci trovare il massimo comune divisore di essi; imperocchè basterebbe trovare tutti li divisori di ciascuno di essi, e scegliere tra sì fatti divisori il massimo tra quelli, che sono comuni a tutti li numeri dati; ma come questo metodo è lungo ed incomodo, noi cercheremo il metodo per mezzo del quale potremo determinarlo direttamente.

*Ricerca del massimo comune divisore
di più numeri dati.*

65. **L**a ricerca del massimo comune divisore tra due o più numeri dati, dipende dalli 4 princjpi seguenti.

1. *Se un numero è divisore comune di più numeri dati, è divisore ancora della somma di essi.* Imperocchè il quoziente, che si ha dividendo ciascuno de' numeri dati pe' loro divisore comune è un numero intero, dunque la somma di tutti questi quozienti sarà ancora un numero intero; ma la somma di tutti questi quozienti forma il quoziente della somma di tutti li numeri dati, dunque il quoziente, che nasce dalla divisione della somma de' numeri dati per lo divisore comune di essi è anche un numero intero; e perciò il divisore comune di più numeri dati è divisore della somma di essi.

2. *Se un numero è divisore di un altro numero è divisore ancora di qualunque moltiplice di esso.* Imperocchè qualunque moltiplice del numero dato può essere considerato come la somma di più numeri tutti eguali al numero proposto.

3. *Il divisore della somma di due numeri dati, e di uno di essi è divisore ancora dell' altro.* In fatti dividendo la somma data

data per lo suo divisore, il quoziente è un numero intero, ma sì fatto quoziente è eguale alla somma de' due quozienti, che si hanno dividendo per lo stesso divisore li due numeri dati, che la compongono, dunqu'essendo, per la ipotesi, uno di tali quozienti un numero intero, anche l'altro quoziente sarà un numero intero, altrimenti un numero intero sarebbe eguale ad un intero unito ad una frazione, lo che è assurdo; dunque il divisore della somma di due numeri e di uno di essi è divisore ancora dell'altro.

4. Il massimo comune divisore di due numeri dati è divisore ancora del residuo, che si ha dividendo il maggiore di essi per lo minore, ed è il massimo comune divisore del minore de' numeri dati ed il medesimo residuo.

Sieno dati li due numeri 86 e 18, e si divida 86 per 18, noi avremo il quoziente 4, ed il residuo 14; si vuole dimostrare: I. che se un numero D è il massimo comune divisore di 86 e 18, esso sarà divisore del residuo 14. II. che D è il massimo comune divisore, che esiste tra 18 e 14.

I. Si è dimostrato, che in qualunque divisione il dividendo è eguale al prodotto del divisore moltiplicato per lo quoziente più il residuo; dunque $86 = 18 \times 4 + 14$; ma se queste quantità eguali si dividono per lo stesso numero D , li quozienti, che ne risultano debbono

essere eguali; dunque $\frac{86}{D} = \frac{18 \times 4}{D} + \frac{14}{D}$; ma

per ipotesi D è divisore di 18 , e per conseguenza del suo multiplice 18×4 , è divisore ancora di 86 somma di 18×4 e di 14 ; dunque essendo D divisore della somma 86 , e di uno de' numeri 18×4 , sarà divisore ancora dell'altro numero 14 ; dunque il massimo comune divisore di due numeri è divisore del residuo, che nasce dividendo il maggiore di essi per lo minore.

II. Resta a dimostrare, che lo stesso numero D è il massimo comune divisore del minore de' numeri dati, cioè di 18 , e del residuo 14 .

Sia se è possibile un altro numero D' maggiore di D il massimo comune divisore di 18 e di 14 ; sapendo che $86 = 18 \times 4 + 14$;

noi avremo $\frac{86}{D'} = \frac{18 \times 4}{D'} + \frac{14}{D'}$, ma per ipo-

tesi D è divisore di 18 e per conseguenza di 18×4 , è ancora divisore di 14 , dunque essendo divisore comune de' due numeri 18×4 , e 14 sarà divisore della loro somma 86 , dunque D è divisore comune di 86 e 18 , e perciò li due numeri dati 86 e 18 avrebbero un divisore comune maggiore del loro massimo comune divisore, lo che è assurdo; dunque il numero D , che è il massimo comune divisore de' numeri dati 86 e 18 , è anche il massimo comune divisore del

83

minore di essi e del residuo dato dalla divisione del maggiore 86 per lo minore 18.

57. Ciò posto proponiamoci di trovare il massimo comune divisore de' due numeri 864 e 369.

Noi incominceremo dall'osservare, che dovendo il massimo comune divisore di 864 e 369 dividere il minore di essi 369, non può essere un numero maggiore di 369, poichè un numero maggiore non può dividere un numero minore, indi rifletteremo che 369 è divisore di se medesimo, e che per conseguenza se esso fosse divisore ancora di 864, sarebbe esso medesimo il massimo comune divisore dimandato, quindi concludiamo, che dobbiamo tentare la divisione di 864 per 369, ma questa divisione dà un residuo 126, dunque concludiamo che 369 non è il massimo comune divisore dimandato; ma noi abbiamo dimostrato, che il massimo comune divisore, che esiste tra 864 e 369 è lo stesso di quello, che esiste tra 'l minore 369, ed il residuo 126, che si ha dividendo 864 per 369; quindi la difficoltà è diminuita, poichè essa si riduce a ricercare il massimo comune divisore tra 369 e 126, numeri rispettivamente minori de' numeri dati 864 e 369; perciò operando sopra 369 e 126, come abbiamo operato sopra de' numeri dati 864 e 369, avremo il quoziente 2 ed il residuo 117; ma il massimo comune divisore, che esiste tra

*

864 e 369 è lo stesso di quello, che esiste tra 369 e 126, e quello che esiste tra 369 e 126 è lo stesso di quello che esiste tra 126 e 117, quindi per trovarlo divideremo 127 per 117, ed avremo il quoziente 1 ed il residuo 9, dal che conchiudiamo che 117 non è il massimo comune divisore dimandato, ed applicando lo stesso raziocinio alli numeri 117 e 9 noi proveremo, che il massimo comune divisore dimandato è quello, che esiste tra 117 e 9, e per conseguenza divideremo 117 per 9, e poichè questa divisione dà il residuo zero, conchiuderemo che 9 è il massimo comune divisore di 117 e 9; ma noi abbiamo dimostrato, che il massimo comune divisore, che esiste tra li numeri dati 864 e 369 è lo stesso di quello, che esiste tra 117 e 9; dunque 9 è il massimo comune divisore, che esiste tra 864 e 369. Ed in fatti se si dividono per 9 li numeri dati 864 e 369, noi avremo per quozienti 96 e 41, li quali, non avendo alcun divisore comune, sono numeri primi fra loro.

Per maggiore comodo noi disponiamo la operazione come qui appresso

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \quad 2 \quad 1 \quad 13 \\
 864 & 369 \mid 126 \mid 117 \mid 9 \\
 126 & 117 \mid 9 \mid 000 \mid
 \end{array}$$

Potendo li raziocinj adoperati essere applicati a due altri numeri qualunque, noi conchiudiamo la regola generale.

Per trovare il massimo comune divisore tra due numeri dati, si divida il maggiore di essi per lo minore, se questa divisione dà zero per residuo, il minore de' numeri dati sarà il massimo comune divisore dimandato; ma se essa dà per residuo un numero, si divida il minore de' numeri dati per questo residuo, se questa divisione dà zero per residuo, il primo residuo è il massimo comune divisore ricercato, ma se essa dà ancora per residuo un numero, si divida il primo residuo per lo secondo, se questa divisione dà per residuo zero, il secondo residuo sarà il massimo comune divisore dimandato, altrimenti si divida il secondo residuo per lo terzo, e così si proceda avanti, dividendo il residuo di ciascuna divisione per lo residuo della seguente, fino a tanto che si giugnerà a trovare un quoziente esatto, il residuo che avrà esattamente diviso il residuo precedente sarà il massimo comune divisore dimandato.

Se per caso questo ultimo residuo è l'unità, noi conchiuderemo che li due numeri proposti hanno per loro comune divisore soltanto l'unità, e che per conseguenza essi sono numeri primi rispettivamente fra loro.

58. Il metodo per trovare il massimo comune divisore tra più numeri dati si ricava facilmente dalle cose già dette; in fatti se si dimanda il massimo comune divisore, che

esiste tra li tre numeri 48, 18, 15; noi ragioneremo così; il massimo comune divisore dimandato deve dividere li due numeri 48, 18, dunque non può essere maggiore di 6, che è il loro massimo comune divisore, e perciò li fattori comuni de' tre numeri dati debbono necessariamente essere tra quelli, che sono comuni a 6 ed a 15; ma il solo fattore comune a 6 e 15 è 3, dunque il massimo comune divisore di 48, 18, 15 è 3; ed in fatti se si dividono per 3 li tre numeri dati, si avranno li tre quozienti 16, 6, 5, li quali evidentemente sono numeri primi fra loro. Dunque il massimo comune divisore di tre numeri dati è quello che esiste tra uno di tali numeri, ed il massimo divisore comune degli altri due. Con un simile raziocinio si può dimostrare, che il massimo comune divisore di quattro numeri è quello, che esiste tra uno di essi, ed il massimo comune divisore degli altri tre; e che generalmente per trovare il massimo comune divisore di più numeri dati, *basta cercare il massimo comune divisore successivamente tra 'l primo ed il secondo de' numeri dati, tra l' comune divisore, che ne risulta, ed il terzo numero, tra questo secondo divisore, ed il quarto numero, e così in appresso, fino all' ultimo de' numeri proposti; il massimo comune divisore trovato nell' ultima operazione sarà il massimo comune divisore dimandato.*

ARTICOLO V.

*Ricerca del minimo dividendo comune
di più numeri dati.*

59. **D**opo di avere esposto il metodo per trovare il massimo divisore comune di più numeri dati, ci resta a cercare il metodo per trovare il minimo dividendo comune di più numeri dati; e per fare ciò noi rifletteremo, che per trovare il minimo numero divisibile per gli quattro numeri 4, 6, 8, 10 basta, che li fattori primi di questi numeri entrino nella composizione del numero cercato tante volte quante ne bisognano per la divisibilità, e non più; quindi la difficoltà si riduce a trovare il massimo numero di volte, che ciascheduno de' fattori primi deve entrare come fattore ne' numeri dati, così nel caso proposto, li quattro numeri 4, 6, 8, 10 si decompongono rispettivamente in 2×2 , 2×3 , $2 \times 2 \times 2$, 2×5 , lo che ci dimostra, che il numero 2 non può entrare meno di tre volte come fattore nel numero cercato, poichè altrimenti esso non sarebbe divisibile per 8; e che li fattori 3, 5 debbono entrarvi una sola volta; quindi noi comporremo il numero dimandato per mezzo de' fattori 2, 2, 2, 3, 5 fra loro moltiplicati; il numero $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, che ne risulta è evidentemente divisibile per 4, poichè

contiene due volte il fattore 2, è divisibile per 6, giacchè contiene li fattori 2, 3; è divisibile per 8, perchè contiene tre volte il fattore 2, ed in fine è divisibile per 10, giacchè contiene li fattori 2, 5. Dippiù esso è il minimo numero divisibile per gli quattro numeri dati, poichè contiene li soli fattori 2, 3, 5, e li contiene il solo numero di volte, che è necessario per la divisibilità, quindi noi avremo la seguente regola generale.

60. Per avere il minimo dividendo comune di più numeri dati bisogna: 1. *determinare tutti li divisori primi di ciascuno di essi*; 2. *determinare il massimo numero di volte, che ciascun di sì fatti divisori entra come fattore in uno di essi*; 3. *formare la più alta potenza, alla quale questo fattore è elevato nelli numeri dati*; 4. *fare il prodotto di tutte le potenze di tali divisori, e questo prodotto sarà il minimo dividendo comune de numeri dati.*

ARTICOLO VI.

Estrazione delle Radici.

61. **N**oi dobbiamo occuparci ora della *estrazione delle radici*, ossia della ricerca di quel numero, che moltiplicato un determinato numero di volte per se medesimo produca un numero dato. Egli è evidente, che essendo

questo problema inverso di quello della elevazione a potenza, la sua soluzione deve dipendere dalla legge, secondo la quale le radici, e le potenze sono fra loro ligate; quindi avendo noi esposte le leggi, secondo le quali si compongono il quadrato, ed il cubo di un numero, noi ci proponiamo di ricavare da esse li metodi per determinare la radice quadrata, e la radice cubica di un numero dato,

Essendo, come abbiamo avvertito, la operazione della estrazione della radice quadrata inversa di quella della elevazione a quadrato, è evidente che bisogna richiamarsi a memoria il metodo tenuto per elevare un numero a quadrato, per potere trovare il metodo inverso, il quale ci conduca a determinare la radice quadrata di un quadrato dato; ma per trovare il quadrato di un numero composto da decine, e da unità, noi abbiamo unito in una somma il quadrato delle decine, il prodotto del doppio delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità, quindi se in un quadrato dato noi potessimo conoscere il quadrato delle decine, ed il prodotto del doppio delle decine per le unità della radice, noi potremmo facilmente trovare le decine e le unità della radice, almeno nel caso, in cui la radice avesse soltanto due cifre; giacchè le decine della radice dovendo in tale caso essere espresse da una so-

la cifra, il quadrato di essa non può avere più di due cifre, e perciò la cifra delle decine si potrebbe conoscere per mezzo della tavola pitagorica. Allora essendo a noi nota la cifra delle decine della radice, e supponendo conosciuto il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità, prendendo il doppio delle decine, a noi sarebbe noto uno de' fattori di tale prodotto, e dividendo questo prodotto per lo doppio delle decine trovate, noi troveremo l'altro fattore, cioè la cifra delle unità; locchè riduce la difficoltà a cercare la maniera di potere in un quadrato dato distinguere, il quadrato delle decine della radice, ed il prodotto del doppio dello medesime decine per le unità. Ciò posto proponiamoci il seguente problema.

62. *Dato un numero trovare la sua radice quadrata, se esso è un quadrato perfetto, e se non è quadrato perfetto, trovare quella del massimo quadrato contenuto in esso.*

Supponiamo in primo luogo, che il numero dato non abbia più di quattro cifre, e per fissare le idee, supponiamo che il numero dato sia 6867.

Noi sappiamo, che il quadrato di un numero di due cifre non può avere meno di tre cifre nè più di quattro, dal che concludiamo, che la radice quadrata di 6867 deve essere composta da due cifre, e

$$\begin{array}{r|l} 6867 & 82 \\ 467 & 162 \\ \hline 143 & \end{array}$$

per conseguenza, che essa deve avere una cifra, che esprime le sue decine, ed un'altra che disegna le sue unità, e conchiudiamo ancora, che il numero dato 6867 deve contenere il quadrato delle decine, il prodotto del doppio delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità della radice; ma noi abbiamo dimostrato, che il quadrato delle decine viene in centinaia, dunque la cifra 7 delle unità, e la cifra 6 delle decine del numero dato 6867 non possono fare parte del quadrato delle decine della radice, e per conseguenza il quadrato della cifra delle decine deve essere contenuto nelle sole due prime cifre a sinistra nel numero dato, cioè in 68, di maniera che essendo 64 il massimo quadrato contenuto in 68, esso sarà il quadrato della cifra delle decine della radice dimandata, ed essendo 8 la radice quadrata di 64, noi conchiuderemo, che 8 è la cifra delle decine della radice; indi sottraendo 64 centinaia, ossia 6400 dal numero dato, noi avremo il residuo 467, il quale deve contenere il prodotto del doppio delle 8 decine per le unità della radice, ed il quadrato delle medesime unità; ma abbiamo dimostrato, che il prodotto del doppio delle decine per le unità della radice viene in decine, dunque la cifra 7 delle unità del residuo 467 non può fare parte di sì fatto prodotto, e perciò noi possiamo considerare il numero 46 come se es-

so fosse il prodotto del doppio delle 8 decine della radice per la cifra delle unità, quindi prendendo il doppio delle 8 decine, noi avremo il fattore 16 di tale prodotto, e dividendo il prodotto 46 per 16 avremo l'altro fattore 2, cioè la cifra 2 delle unità; ma poichè la cifra 2 deve riunire in se due condizioni, cioè quella di essere il quoziente di 46 diviso per 16, e quella di essere la cifra delle unità della radice, essa dovrà essere tale, che il suo quadrato unito al prodotto del doppio delle decine per essa possa essere sottratto da 467, dunque bisognerà, che essa sia verificata, lo che faremo scrivendo la cifra 2 delle unità alla destra del doppio delle decine cioè di 16, ed indi moltiplicando il numero 162, che ne risulta, per 2, ed eseguendo la moltiplicazione, ed indi la sottrazione avremo 143 per residuo finale, ed 82 per la radice quadrata del numero dato 6867. Dal che concludiamo che 6867 non è un quadrato perfetto, ma la somma del quadrato di 82 e del residuo 143.

Poichè operando secondo il metodo dato noi diamo alla radice le cifre le maggiori possibili; ne segue evidentemente, che qualora il numero proposto non è un quadrato perfetto, la radice trovata deve differire dalla vera radice di esso di una quantità minore della unità, come nello esempio precedente, il numero dato 6867 è maggiore del quadrato di 82, ed è minore del quadrato di 83.

63. Per verificare se nel calcolo si sia commesso errore, e se 82 sia veramente la radice del massimo quadrato contenuto in 6867, noi osserveremo, che l'ultimo residuo 143 deve esprimere la differenza, che passa tra il numero proposto 6867 ed il quadrato di 82, ma questa differenza deve essere minore di quella, che passa tra il quadrato di 82 e quello di 83, poichè il numero dato 6867 è un numero intermedio tra il quadrato di 82 e quello di 83, talmentecchè se noi conoscessimo generalmente la differenza, che esiste fra li quadrati di due numeri consecutivi, potremmo giudicare, se il residuo finale della estrazione della radice quadrata è quale deve essere, e per conseguenza assicurarci se nella operazione si sia o no commesso errore di calcolo. Ma se noi eleviamo a quadrato un numero diviso in due parti, la seconda delle quali sia l'unità, sì fatto quadrato sarà composto dalla somma del quadrato della prima parte, dal prodotto del doppio della prima parte moltiplicato per 1, e dal quadrato di 1; ma il doppio della prima parte moltiplicato per 1 è la stessa prima parte presa due volte, ed il quadrato di 1 è 1; dunque *il quadrato di un numero differisce dal quadrato del numero prossimo maggiore, del doppio del medesimo numero accresciuto di una unità.* Dal che ricaviamo, che *il residuo finale dato dalla estrazione della radi-*

ce quadrata da un numero dato deve essere minore del doppio della radice trovata accresciuta di una unità.

Così nello esempio precedente, se accresciamo 82 di una unità, troveremo, che il quadrato di 83 considerato come la somma di 82 e di 1 è composto da $82 \times 82 + 82 \times 2 + 1$, talmente che $82 \times 2 + 1$ ossia 165 è la differenza, che passa fra 'l quadrato di 82, e quello di 83; e poichè il residuo finale 143 è minore di 165, conchideremo, che si fatto residuo ha le condizioni, che deve avere per renderci assicurati, che nella operazione non si è commesso errore di calcolo.

64. Proponiamoci ora di estrarre la radice quadrata esatta o prossima dal numero 848967, il quale è composto da più di quattro cifre.

Noi osserveremo, che questo numero deve avere la sua radice composta da decine, e da unità, poichè essa ha più di due cifre, e che per conseguenza esso deve essere la somma del quadrato delle decine, del prodotto del doppio delle decine per le unità, e del quadrato delle unità della radice; quindi conchiuderemo, come abbiamo fatto nel caso precedente, che le ultime due cifre a destra del numero dato non possono fare parte del quadrato delle decine della radice, e che il quadrato delle decine della radice deve essere contenuto nel numero 8489, e che per conseguenza se vogliamo conoscere le decine

della radice dobbiamo estrarre la radice da 8489, la quale estratta, adoperando il metodo dato nel caso precedente, troveremo essere 92, numero che determina le decine della radice, ed avremo il residuo 25; e poichè dal numero dato abbiamo sottratte tutte le parti, che compongono il quadrato di 92 decine, ne segue che da esso è stato sottratto il quadrato completo delle 92 decine della radice; e che per conseguenza il residuo 2567 deve contenere ancora il prodotto del doppio di 92 decine per le unità, ed il quadrato delle medesime unità della radice; quindi cercheremo la cifra delle unità con lo stesso metodo, che abbiamo adoperato nel caso, in cui la radice avea soltanto due cifre, e troveremo, che la cifra delle unità è 1; la operazione terminata conchiuderemo, che 921 è la radice del massimo quadrato contenuto nel numero dato 848967, e troveremo il residuo finale 726, il quale essendo minore della radice trovata non ha bisogno di essere verificato.

Se il numero proposto avesse più di 6 cifre, noi ragioneremo ed opereremo come abbiamo fatto nel caso precedente.

65. Ripetendo lo stesso raziocinio adoperato nella estrazione della radice quadrata noi vediamo, che per trovare il metodo per la estrazione della radice cubica, dobbiamo ricavarlo dallo esame della composizione del cu-

96

bo; ma noi abbiamo dimostrato, che per trovare il cubo di un numero composto da decine, e da unità dobbiamo riunire in una somma il cubo delle decine, il triplo del prodotto del quadrato delle decine per le unità, il triplo del prodotto del quadrato delle unità per le decine, ed il cubo delle unità della radice; dunque la difficoltà, per estrarre da un numero dato la radice cubica, si riduce a cercare la maniera di potere distinguere le due prime parti del cubo dato, cioè il cubo delle decine, ed il triplo del prodotto del quadrato delle decine per le unità della radice dimandata, quindi per fissare meglio le nostre idee proponiamoci di estrarre la radice cubica da 79648.

$$\begin{array}{r|l}
 79648 & 43 \\
 \hline
 15648 & 3 \times 1600 \times 3 = 14400 \\
 141 & 3 \times 9 \times 40 = 1080 \\
 & 3 \times 3 \times 3 = 27 \\
 \hline
 & 15507
 \end{array}$$

Noi abbiamo dimostrato che un numero di due cifre deve avere al suo cubo non meno di 4 cifre ne più di 6, quindi avendo il numero dato cinque cifre la sua radice deve averne due, una delle quali esprime le sue decine, e l'altra le unità, dunque il numero dato deve essere composto dal cubo delle decine, dal triplo del prodotto del qua-

quadrato delle decine per le unità, dal triplo del prodotto del quadrato delle unità per le decine, e dal cubo delle unità della radice; ma il cubo delle decine non può contenere unità di grado inferiore a quello delle migliaia, dunque le tre prime cifre a destra del numero dato non possono fare parte del cubo delle decine della radice dimandata, e perciò questo cubo deve essere contenuto in 79, ma il più grande cubo contenuto in 79 è 64, di cui la radice cubica è 4, quindi 4 è la cifra delle decine della radice dimandata. Di poi se noi sottraiamo da 79 il cubo 64 avremo il residuo 15, ed avremo il numero 15648, il quale conterrà la somma delle tre altre parti del cubo della radice, ma abbiamo ancora dimostrato che il triplo del prodotto del quadrato delle decine per le unità della radice non può dare unità di grado minore di quello delle centinaia, dunque 48 non può fare parte del prodotto del triplo del quadrato delle decine per le unità, e perciò questo prodotto dovrà essere contenuto in 156, quindi considerando 156 come se fosse sì fatto prodotto, dividendolo per 48, che è il triplo del quadrato delle 4 decine, avremo per quoziente 3; ma poichè il numero 3 deve nello stesso tempo soddisfare a due condizioni, cioè a quella di essere il quoziente di 156 diviso per 48, ed a quella di essere la cifra delle unità della radice dimandata, deve

essere verificato, quindi bisogna vedere se in esso si trovano le condizioni, che deve avere la cifra delle unità di una radice cubica; perciò noi moltiplicheremo il triplo del quadrato delle decine, cioè 4800 per 3, ed avremo 14400, indi moltiplicheremo il triplo del quadrato di 3 per 4 decine, ed avremo 1080, in fine faremo il cubo di 3 unità, che è 27, ed addizioneremo tutti questi prodotti, li quali faranno la somma 15501, la quale sottratta da 15648 dà per residuo finale 147, dal che conchiudiamo che 43 è la radice cubica del massimo cubo contenuto in 79647.

Noi osserveremo per rapporto alla radice cubica quello stesso, che abbiamo osservato relativamente alla radice quadrata, cioè

1. Che la radice cubica esatta del numero dato deve essere maggiore di 43, e minore di 44.
- 2°. Che il residuo 147 deve esprimere la differenza, che passa tra 'l cubo della radice trovata, ed il numero proposto, e che per conseguenza esso deve essere minore della differenza che passa tra 'l cubo della radice trovata 43 ed il cubo di essa accresciuto di una unità, cioè di 44, di maniera che se noi conoscessimo generalmente la differenza che passa tra li cubi di due numeri consecutivi, potremmo giudicare se il residuo trovato soddisfa alle condizioni necessarie, perchè la radice trovata sia la radice del massimo cubo contenuto nel numero dato, lo che potrebbe

99

servire per verificare la operazione della estrazione della radice cubica.

Si metta $44 = 43 + 1$. Noi sappiamo che il cubo di $43 + 1$ è composto dal cubo di 43 , dal triplo del prodotto del quadrato di 43 per 1 , dal triplo del prodotto del quadrato di 1 per 43 , e del cubo di 1 ; talmente che se da questa somma noi togliamo il cubo di 43 , troveremo che la differenza, che passa tra 'l cubo di 43 , e quello di 44 è $3 \times 43 \times 43 + 3 \times 43 + 1$, e poichè questo raziocinio è indipendente dal numero che abbiamo preso per esempio, conchiuderemo generalmente.

I. Che la differenza, che passa fra li cubi di due numeri consecutivi è composta da tre volte il quadrato del numero minore, più tre volte lo stesso numero, più l'unità.

II. Che l'ultimo residuo dato dalla operazione della estrazione della radice cubica di un dato numero deve essere minore del triplo del quadrato della radice trovata unito col triplo di essa accresciuto di una unità.

66. Se il numero proposto per estrarre da esso la radice cubica avesse avuto 4, oppure 6 cifre, per le cose dimostrate avremmo trovato che la sua radice dovea avere necessariamente due cifre, ed avremmo ragionato, ed operato come abbiamo fatto nel caso precedente, in cui il numero dato avea cinque cifre.

*

67. Se poi il numero proposto avesse più di 6 cifre, nel quale caso la sua radice cubica ne avrebbe almeno tre, ragionando su questo caso come abbiamo fatto nel caso precedente, la sua radice si troverebbe facilmente, considerando le decine della radice come composte da due o più cifre, e facendo li raziocinj analoghi a quelli, che abbiamo fatto per l'estrazione della radice quadrata, nel caso che le decine della radice doveano essere espresse da due o più cifre.

68. Conoscendo noi li metodi per estrarre le radici quadrate, e cubiche, non è difficile il vedere come facilmente si possono da un numero dato estrarre le radici 4^a , 6^a , 8^a , 9^a , 12^a &c.

In fatti 1. Noi sappiamo, che la quarta potenza di un numero si ha elevando a quadrato il suo quadrato, quindi per estrarre da un numero la sua radice quarta, basterà estrarre la radice quadrata dalla radice quadrata del numero dato.

c. Poichè la 6^a potenza di un numero si trova moltiplicando il suo quadrato per lo suo cubo, o viceversa moltiplicando il cubo per lo quadrato di esso, noi avremo la radice sesta di un numero dato, estraendo la radice cubica dalla radice quadrata; o la radice quadrata dalla radice cubica del numero dato.

3. Essendo la potenza 8^a di un numero

il quadrato della quarta potenza di esso , o quarta potenza del suo quadrato , ne segue che noi troveremo la radice 8^a di un numero , estraendo la radice quarta dalla radice quadrata ; oppure la radice quadrata dalla radice quarta , o in fine la radice quadrata dalla radice quadrata della radice quadrata del numero dato.

4. La 9^a potenza di un numero è il cubo del cubo di esso , dunque per avere la radice 9^a di un numero basterà estrarre la radice cubica dalla radice cubica di esso.

5. La potenza 12^a di un numero è il cubo della quarta potenza di esso , o la quarta potenza del suo cubo , o il cubo del quadrato del quadrato di esso ; dunque per trovare la radice 12^a di un numero , basterà estrarre la radice cubica dalla radice quadrata della radice quadrata di esso ; oppure estrarre la radice quarta dalla radice quadrata della radice cubica di esso.

Con un raziocinio simile noi ridurremo le estrazioni delle radici , le quali hanno li loro gradi disegnati da numeri , che non hanno altri fattori primi allo infuori di 2 e 3 , ad estrazioni successive di radici quadrate , e radici cubiche .

Verificazioni delle quattro operazioni.

69. **N**elli calcoli aritmetici non basta essere sicuri della bontà de' metodi, ma bisogna ancora avere la certezza di non avere errato nella esecuzione de' calcoli, quindi è necessario cercare de' metodi per verificare li risultati da esse forniti.

70. Volendo verificare il risultato di una addizione, incominceremo dal riflettere, che la somma di più numeri essendo nata dalla addizione successiva di ciascuna delle colonne delle unità della medesima specie, se noi togliamo successivamente la somma di ciascheduna di queste colonne dalle somme parziali, che le unità della medesima specie hanno fornito alla somma totale, noi dobbiamo avere zero per residuo della sottrazione dell'ultima colonna, lo che succedendo noi concluderemo, che il risultato della addizione è esatto. Ora se noi riflettiamo, che la somma di una colonna non può mai somministrare alla somma totale unità di grado inferiore a quello delle sue, e che può somministrarne di quelle di un ordine superiore, noi concludiamo, che la cifra della somma situata sotto la prima colonna a sinistra unita con le cifre degli ordini superiori contie-

ne la somma parziale della prima colonna a sinistra, e che qualora questa somma parziale fosse maggiore della somma della colonna, noi conosceremo l'eccesso di essa sopra la somma della colonna, sottraendo da essa la somma della colonna, e considereremo questo eccesso come appartenente alle somme parziali, che sono risultate dalla addizione delle colonne inferiori; indi ripeteremo la stessa operazione sopra ciascuna delle colonne inferiori.

Così se noi ci proponiamo di verificare se 16252 è la vera somma de' numeri 5649, 768, 8946, 889	5649 768 8946 889
con.	

Dovendo la somma totale contenere tutte le migliaia, tutte centinaja, tutte decine, e tutte le unità dei numeri dati, ne segue che se noi togliamo dalle 16 migliaia della somma totale le 13 migliaia fornite dalla colonna delle migliaia, il residuo di 3 migliaia unito al numero 252 espresso dalle cifre seguenti darà 3252, il quale deve essere la somma delle centinaja, delle decine, e delle unità de' numeri dati; indi se dalle 32 centinaja di 3252 togliamo le 30 centinaja fornite dalla colonna delle centinaja, il residuo 2 centinaja unito al numero 52 darà il numero 252, il quale deve essere la somma delle decine e delle unità de' numeri dati; e sottraendo	16252 3252 252 32 0
--	---------------------------------

da esso le 22 decine fornite dalla colonna delle decine avremo il residuo 3 decine, che unite al numero 2 espresso dalla cifra seguente darà 32, il quale deve essere la somma delle unità de' numeri dati, e sottraendo da esso le 32 unità fornite dalla colonna delle unità, noi avremo il residuo zero; e conosceremo che la somma trovata è la vera somma de' numeri dati. Dal che ricaviamo, che per verificare una somma si deve sottrarre successivamente andando da sinistra a destra la totalità di ciascheduna colonna dalle unità della sua specie, che si trovano nella somma totale, e se la sottrazione dell'ultima colonna dà per residuo zero la somma trovata è esatta.

7. Per verificare il residuo di una sottrazione, noi consideriamo che il numero maggiore è composto dal numero di cui esso eccede il minore, e dal numero minore, quindi evidentemente concludiamo, che se addizioniamo il numero minore col residuo trovato, e la somma che ne risulta è eguale al numero maggiore, il residuo è esatto. Dal che ricaviamo, che

Per verificare il residuo di una sottrazione, si debbono insieme addizionare il residuo ed il numero minore; se la somma che ne risulta produce il numero maggiore dato, il residuo è esatto.

72. Poichè noi abbiamo verificata la addi-

zione per mezzo della sottrazione, e la sottrazione per mezzo della addizione, la analogia ci induce a cercare nella divisione la verifica della moltiplicazione, e nella moltiplicazione quella della divisione; ed in fatti

73. *Nella moltiplicazione si può considerare uno de' fattori come un numero ignoto, e ricercarlo dividendo il prodotto trovato per l'altro fattore; se la divisione dà per quoziente il fattore noto, che da noi è stato considerato come incognito, conchiuderemo che il prodotto trovato è il vero prodotto.*

74. Finalmente per quanto riguarda la verifica del quoziente di una divisione, la regola si presenta da se medesima; poichè noi sappiamo che il dividendo è la somma del prodotto del divisore per lo quoziente, e del residuo finale; dunque *basterà moltiplicare il quoziente per lo divisore, ed unire al prodotto che ne risulta il residuo finale, se la somma che ne nasce riproduce il dividendo conchiuderemo, che il quoziente trovato è esatto.*

75. Bisogna quì avvertire, che spesso può accadere che ne calcoli si facciano errori opposti, li quali possono scambievolmente distruggersi; quindi le verificazioni debbono essere considerate come probabilità più o meno forti, ma che generalmente parlando esse danno una certezza assoluta soltanto in certi casi sommamente semplici.

Delle Frazioni.

A R T I C O L O I.

Nozioni preliminari.

76. **L**a divisione, la quale non può essere esattamente eseguita, cioè la divisione in cui l'ultimo residuo non è eguale a zero, fa nascere le frazioni.

Per esempio qualora ci proponiamo di dividere 25 per 7, noi vogliamo trovare un numero, il quale moltiplicato per 7 riproduca il dividendo 25; supponiamo che si fatto numero sia 3, noi troviamo che 7×3 produce 21, numero il quale è minore di 25, e se supponiamo che il numero cercato sia 4, noi troviamo che 7×4 produce 28, numero maggiore di 25; dunque noi dobbiamo concludere, che il quoziente di 25 diviso per 7 è maggiore di 3, ed è minore di 4, ma li numeri 3, e 4 differiscono soltanto di una unità; quindi il quoziente completo che deve risultare dalla divisione di 25 per 7 deve essere 3 unità più una quantità minore di una unità. Lo che ci conduce a ricercare, quale debba essere la quantità minore della unità, che deve essere

aggiunta al quoziente 3 per avere il quoziente completo di 25 diviso per 7.

Per fare ciò, consideriamo il dividendo 25 come composto da $21+4$, e noi diremo, che il quoziente completo di 25 diviso per 7 è composto dalla somma di due quozienti, uno de' quali è quello che nasce dalla divisione di 21 per 7, e l'altro quello che risulta dalla divisione di 4 per 7; dunque per trovare il quoziente completo di 25 diviso per 7, noi dobbiamo trovare il quoziente che risulta dalla divisione di 4 per 7, ed aggiungerlo al quoziente 3, che nasce dalla divisione di 21 per 7.

Per trovare il quoziente, che nasce dividendo 4 per 7, noi concepiamo la unità divisa in 7 parti uguali, e poichè una di sì fatte parti ripetuta 7 volte riproduce l'unità, noi conchiudiamo, che ciascuna di esse è il quoziente che si ha dividendo l'unità per 7; ma il numero 4 vale $1+1+1+1$, dunque noi troveremo il quoziente di 4 diviso per 7 prendendo sopra ciascuna delle 4 unità, che compongono il 4, una settima parte; e quindi conchiuderemo, che il quoziente che nasce dividendo 4 per 7 è 4 settime parti della unità. Dunque per avere il quoziente completo di 25 diviso per 7; noi dobbiamo fare la somma del quoziente di 21 diviso per 7, ossia di 3, e del quoziente di 4 diviso per 7, il quale è 4 parti settime della unità.

77. La parte minore della unità , che noi dobbiamo aggiungere alle unità del quoziente , per avere il quoziente completo di una divisione , si dice *frazione* , oppure *rotto*.

78. Dal che ricaviamo , che qualora il dividendo non è divisibile esattamente per lo divisore , il quoziente è composto da due parti , delle quali una è un numero intero , e l'altra è una frazione , la quale indica il quoziente dell'ultimo residuo diviso per lo divisore.

79. Gli Aritmetici hanno stabilito di scrivere una frazione mettendo il numero che indica in quante parti eguali si concepisce divisa l'unità sotto del numero , che indica quante di sì fatte parti si debbono prendere , e separando l'uno di essi dall'altro per mezzo di una linea. Così volendo scrivere 4 parti settime della unità , hanno scritto $\frac{4}{7}$, in modo che $\frac{4}{7}$ indica , che noi dobbiamo prendere 4 parti della unità divisa in 7 parti eguali. Dippiù essi hanno dato varj nomi alle suddivisioni della unità ; quando l'unità è stata divisa in 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 parti eguali , ciascuna di essa è stata chiamata rispettivamente *un mezzo* , o *una metà* ; *un terzo* , *un quarto* , *un quinto* , *un sesto* , *un settimo* , *un ottavo* , *un nono* , *un decimo* ; quindi le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ si enunciano dicendo *un mezzo* , *un ter-*

20, un quarto, un quinto ec., e le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ec., si enunciano dicendo *due terzi*, *tre quarti*, *cinque settimi* ec.; qualora poi si concepisce l'unità divisa in più di 10 parti eguali, si forma il nome di ciascuna di tali parti, aggiugnendo alla fine della parola, che indica il numero di esse, la terminazione in *esimo*; così la frazione $\frac{1}{15}$ si enuncia dicendo *un quindicesimo*, e la frazione $\frac{7}{15}$ si enuncia dicendo *sette quindicesimi*.

80. Poicchè il numero inferiore serve soltanto per dare il nome, ossia per *denominare* le parti della unità, dalle quali la frazione è composta è stato chiamato *denominatore*, il numero superiore ha ricevuto il nome di *numeratore*, poicchè esso serve per contare il numero delle parti, che compongono la frazione; e tutti due sono designati col nome comune di *termini della frazione*.

81. Essendo la frazione il quoziente della divisione, che si avrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, ed avendo dimostrato, che sì fatto quoziente si determina dividendo l'unità in tante parti eguali quante ne indica il denominatore, e prendendo di esse tante parti quante ne indica il numeratore; ne segue, che, se per esempio, noi abbiamo la frazione $\frac{7}{15}$, potremo enunciarla dicendo, *il quoziente che si ha dividendo 7 per 15*, oppure, *sette quin-*

dicesimi, espressioni identiche, poichè l'una di esse indica il risultato di una operazione di calcolo non ancora eseguita; e l'altra il medesimo risultato già determinato.

82. Noi abbiamo dimostrato 1. che qualora in una divisione si accresce, o si diminuisce il dividendo senza alterare il divisore, il quoziente similmente si accresce, o si diminuisce. 2. Che, qualora il dividendo non essendo variato, si accresce, o diminuisce il divisore, reciprocamente il quoziente si diminuisce, o si accresce. 3. Che, qualora il dividendo si moltiplica, o si divide per un numero, il divisore restando lo stesso, il quoziente si trova similmente moltiplicato, o diviso per lo stesso numero. 4. Che qualora non alterandosi il dividendo si moltiplica, o si divide il divisore per un numero, il quoziente si trova reciprocamente diviso, o moltiplicato per lo stesso numero. 5. Che qualora si moltiplicano, o si dividono sì il dividendo, che il divisore per lo stesso numero, il quoziente non si altera. Ma noi abbiamo dimostrato ancora, che qualunque frazione indica il quoziente della divisione, in cui il numeratore è il dividendo, ed il denominatore è il divisore; dunque 1. Una frazione si accresce, o si diminuisce, qualora si accresce, o diminuisce il suo numeratore senza alterare il suo denominatore. 2. Che una frazione similmente si accresce,

o si diminuisce, qualora non alterando il numeratore, si diminuisce, o si accresce il denominatore. In modo che si può accrescere una frazione, o accrescendo il numeratore senza alterare il denominatore, o diminuendo il denominatore non facendo variare il numeratore; ed una frazione si può rendere minore diminuendo il numeratore senza alterare il denominatore, oppure aumentando il denominatore senza toccare il numeratore.

3. Se noi moltiplichiamo, o dividiamo il numeratore di una frazione per un numero intero senza variare il denominatore, noi moltiplichiamo, o dividiamo la frazione per lo stesso numero. 4. Se moltiplichiamo, o dividiamo per un numero intero il denominatore di una frazione senza alterare il numeratore, la frazione si troverà reciprocamente divisa, o moltiplicata per lo stesso numero: In modo, che possiamo moltiplicare una frazione per un numero intero moltiplicando il numeratore per sì fatto numero intero, senza alterare il suo denominatore, o dividendo per esso il denominatore, senza toccare il numeratore; e possiamo dividere una frazione per un intero, dividendo per sì fatto intero il numeratore, lasciando alla frazione il medesimo denominatore, oppure moltiplicando il denominatore per sì fatto intero, senza alterare il numeratore. 5. Finalmente non si altera una frazione, qualora

si moltiplicano , o si dividono li suoi due termini per lo stesso numero.

83. Disegnando una frazione , il quoziente che si deve avere dividendo il numeratore per lo denominatore , è evidente 1. *Che qualora essa ha il numeratore minore del denominatore , vale meno di una unità , e perciò è una vera frazione.* 2. *Che qualora il numeratore è eguale al denominatore , essa equivale alla unità.* 3. *Che qualora il numeratore è maggiore del denominatore , essa è maggiore della unità , e per conseguenza esse non sono vere frazioni.* Quindi noi chiameremo *frazioni* , soltanto quelle che hanno il numeratore minore del denominatore , ed *espressioni frazionarie* quelle , che non hanno il numeratore minore del denominatore.

ARTICOLO II.

Delle operazioni preparatorie , o ancillari.

84. **Q**ualora da noi si vogliono paragonare fra loro le frazioni , non basta , che esse sieno rapportate alla medesima unità , ma bisogna ancora che esse sieno espresse in parti di essa , le quali sieno della medesima grandezza , quindi si vede che noi non potremo conoscere il rapporto che passa tra le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, giacchè sebbene da noi si
sup.

supponga, che esse sieno rapportate alla medesima unità, pure essendo espresse in parti di essa, le quali sono di differente grandezza, il loro rapporto non può determinarsi; quindi è necessario di cercare un metodo per mezzo del quale si possano ridurre in parti della medesima grandezza, senza che il valore di esse si alteri; ma noi sappiamo, che il valore delle parti della unità è determinato dai denominatori delle frazioni, dunque noi dobbiamo cercare il metodo da ridurre le frazioni allo stesso denominatore senza che il loro valore sia alterato. Quindi supponiamo che sieno date le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, quali debbano essere ridotte al medesimo denominatore.

Noi incominceremo dal riflettere, che se si desse a tutte per denominatore il prodotto di tutti li denominatori, noi avremmo

le frazioni $\frac{3}{4 \times 6 \times 9}$, $\frac{5}{4 \times 6 \times 9}$, $\frac{7}{4 \times 6 \times 9}$,

frazioni, le quali sebbene abbiano un medesimo denominatore, pure non hanno rispettivamente lo stesso valore delle frazioni date, ma noi osserveremo, che il denominatore

della frazione $\frac{3}{4 \times 6 \times 9}$ è nato dalla multi-

plicazione del denominatore della frazione $\frac{3}{4}$ per lo prodotto 6×9 , e che la frazione $\frac{3}{4}$ non avrebbe cambiato di valore se moltiplicando

114

il suo denominatore per 6×9 da noi si fosse ancora moltiplicato il suo numeratore 3 per lo stesso 6×9 , dunque la frazione $\frac{3}{4}$

$$= \frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 6 \times 9}; \text{ similmente ragionando noi tro-}$$

$$\text{veremo che } \frac{5}{6} = \frac{5 \times 4 \times 9}{6 \times 4 \times 9}; \text{ e } \frac{7}{9} = \frac{7 \times 4 \times 6}{9 \times 4 \times 6}.$$

Dal che conchiudiamo, che qualora sono date più frazioni, le quali hanno denominatori differenti, noi le riduciamo allo stesso denominatore senza che il loro valore si alteri, *moltiplicando li due termini di ciascheduna di esse per lo prodotto de' denominatori di tutte le altre.*

Ma se consideriamo, il numeratore della

$$\text{frazione } \frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 6 \times 9}, \text{ noi vediamo, che esso è}$$

formato dal numeratore della frazione data $\frac{3}{4}$ moltiplicato per lo prodotto de' denominatori 6, e 9 delle altre due, e similmente che il

$$\text{numeratore della frazione } \frac{5 \times 4 \times 9}{6 \times 4 \times 9} \text{ è formato}$$

dal numeratore 5 della frazione data $\frac{5}{6}$ moltiplicato per lo prodotto 4×9 delli denominatori delle altre due, e che in fine il nume-

$$\text{ratore della frazione } \frac{7 \times 4 \times 6}{9 \times 4 \times 6} \text{ è il prodotto}$$

del numeratore 7 della frazione data $\frac{7}{9}$ per

$4 \times b$, che è il prodotto de' denominatori delle altre due, noi conchiuderemo la seguente regola generale.

Qualora si vogliono ridurre più frazioni al medesimo denominatore senza che il loro valore sia alterato, *si moltiplichi il numeratore di ciascheduna di esse per lo prodotto de' denominatori di tutte le altre, e si dia a ciascuno di sì fatti prodotti per denominatore il prodotto di tutti li denominatori delle frazioni date.*

85. Sebbene il metodo da noi adoperato sia sufficiente per ridurre le frazioni allo stesso denominatore, pure considerando, che le frazioni che ne risultano sono sempre più complicate di quello, che erano le frazioni proposte, noi vediamo che, per rendere i calcoli delle frazioni più commodi, sarebbe necessario di vedere se le frazioni trovate per questo metodo fossero suscettibili di essere ridotte ad una più semplice espressione conservando sempre un denominatore comune, o ciò che vale lo stesso se fosse possibile di trovare un metodo, che, escludendo tutti li fattori inutili, desse alle frazioni ridotte un denominatore comune, che fusse il minimo possibile. Quindi noi osserveremo, che affinchè ciascuna delle frazioni dimandate sia eguale alla corrispondente delle proposte, deve avere per suoi termini quelli della proposta moltiplicati per un medesimo numero,

e che per conseguenza il denominatore comune, che noi cerchiamo, deve essere divisibile per tutti li denominatori delle frazioni date; quindi la quistione si riduce a trovare un numero, che sia divisibile per ciascuno de' denominatori delle frazioni date, e di più che sia il minimo possibile, ossia alla ricerca del minimo dividendo comune delli medesimi denominatori delle frazioni date; numero, che noi troveremo per la regola data.

Dopo di avere trovato il minimo dividendo comune di tutti li denominatori delle frazioni date, che deve essere il denominatore comune delle medesime frazioni ridotte allo stesso denominatore, dobbiamo determinare il numero per cui deve essere moltiplicato ciascuno numeratore delle frazioni proposte, affinchè le nuove frazioni abbiano lo stesso valore delle rispettive frazioni primitive; quindi noi osserveremo, che esso deve essere il quoziente del minimo dividendo comune trovato per lo denominatore della frazione data, giacchè questo quoziente è precisamente il fattore per cui si è moltiplicato il denominatore primitivo, e per conseguenza la frazione ridotta dovendo avere per suo denominatore il suo denominatore primitivo moltiplicato per questo quoziente, anche il numeratore dovrà essere moltiplicato per lo stesso quoziente.

Così se vogliamo che le frazioni $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ sieno ridotte al medesimo denominatore, e che si fatto comune denominatore sia il minimo possibile, noi incominceremo dal determinare il minimo dividendo comune dei denominatori 9, 12, 18, il quale trovato secondo il metodo dato §. è $2 \times 2 \times 3 \times 3$, indi moltiplicheremo li due termini della frazione data $\frac{2}{9}$ per lo quoziente, che si ha dividendo $2 \times 2 \times 3 \times 3$ per 9 ossia per 3×3 ; e poichè questo quoziente si trova supprimendo nel numero dato $2 \times 2 \times 2 \times 3$, il fattore 3×3 , noi moltiplicheremo li due termini della frazione $\frac{2}{9}$ per 2×2 ; e la frazione $\frac{2}{9}$ si

ridurrà a $\frac{4 \times 2 \times 2}{9 \times 2 \times 2} = \frac{16}{36}$. Similmente ragio-

nando noi troveremo che la frazione $\frac{5}{12}$ os-

sia $\frac{5}{2 \times 2 \times 3}$ sarà ridotta al minimo denomi-

natore comune moltiplicando li suoi due ter-

mini per 3; e conchiuderemo che $\frac{5}{12} =$

$\frac{5 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{15}{36}$; ed in fine ripetendo lo

stesso raziocinio per la frazione $\frac{7}{18}$ ossia

$\frac{7}{2 \times 3 \times 3}$ ritroveremo che essa ridotta al mi-

nimo denominatore comune sarà $\frac{7 \times 2}{2 \times 3 \times 3 \times 2} = \frac{14}{36}$

$= \frac{3}{4}$: Dal che ricavaremo la seguente regola generale.

Qualora si vogliono ridurre più frazioni al minimo denominatore comune; si determini il minimo dividendo comune di tutti li denominatori delle frazioni date, indi si moltiplichì il numeratore di ciascheduna frazione per lo quoziente, che si ha dividendo il minimo dividendo comune per lo denominatore della medesima frazione, ed a ciascuno de' prodotti, che ne risultano, si dia per comune denominatore il minimo dividendo comune trovato.

86. Spesso le operazioni di calcolo, che noi dobbiamo eseguire sopra gli interi, e le frazioni; ricercano, che gli interi sieno ridotti ad espressioni frazionarie, le quali abbiano un dato denominatore, come altresì molte volte le operazioni eseguite sopra delle frazioni danno per risultato espressioni frazionarie, le quali contengono degli interi, che noi dobbiamo da esse estrarre; quindi noi dobbiamo cercare 1. il metodo per ridurre un intero ad espressione frazionaria, la quale abbia un dato denominatore; 2. quello di estrarre da una espressione frazionaria gli interi, che essa contiene.

1. Proponiamoci di ridurre l'intero 8 ad espressione frazionaria, la quale abbia per denominatore 7.

Essendo l'unità eguale a $\frac{7}{7}$, è evidente

che 8 è eguale ad 8 volte $\frac{7}{7}$; ma 8 volte $\frac{7}{7} = \frac{8 \times 7}{7}$; dunque $8 = \frac{8 \times 7}{7}$. Dal che ricaviamo,

che per ridurre un intero ad una espressione frazionaria, la quale abbia un dato denominatore, noi dobbiamo *moltiplicare l'intero dato per lo dato denominatore, e formare una espressione frazionaria, la quale abbia per numeratore il prodotto, che risulta da tale moltiplicazione, e per denominatore il denominatore dato.*

87. Se poi si volesse ridurre ad una sola la espressione frazionaria un intero unito ad una frazione, come sarebbe $8 + \frac{5}{6}$, noi incominceremo dal ridurre 8 ad una espressione frazionaria, la quale abbia per denominatore

6, ed avremo $8 = \frac{8 \times 6}{6} = \frac{48}{6}$; indi osserveremo,

che $8 + \frac{5}{6} = \frac{48}{6} + \frac{5}{6}$, espressione che evidentemente si riduce a $\frac{48+5}{6}$; dal che ricaveremo,

che per ridurre ad una sola espressione frazionaria un intero unito ad una frazione, bisogna *moltiplicare l'intero per lo denominatore della frazione data, ed unire al prodotto il numeratore della medesima frazione; indi formare una espressione frazionaria, la quale abbia per numeratore la*

somma trovata , e per denominatore il denominatore della frazione data.

88. II. Sia data la espressione frazionaria $\frac{35}{9}$; dalla quale si debbono estrarre gli interi in essa contenuti ; disegnando una espressione frazionaria il quoziente , che si avrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore , è evidente che noi avremo gli interi , che si contengono nella espressione frazionaria $\frac{35}{9}$, dividendo 35 per 9 ; quindi eseguendo la operazione troveremo , che $\frac{35}{9} = 3 + \frac{8}{9}$; dal che ricaveremo la seguente regola generale ; qualora si vogliono estrarre gli interi contenuti in una espressione frazionaria data , si divida il suo numeratore per lo suo denominatore , il quoziente darà il numero intero , che essa contiene , e la espressione frazionaria data sarà eguale allo intero trovato unito con la frazione vera , che ha per numeratore il residuo della divisione fatta , e per denominatore lo stesso denominatore della espressione frazionaria data.

89. La brevità , e la semplicità de' calcoli esiggon , che le frazioni sieno espresse per gli minimi numeri possibili , e poichè le frazioni non cambiano di valore , qualora li suoi due termini si dividono per un medesimo numero , ne segue , che se noi scopriamo un fattore comune a tali termini , e dividiamo per esso ambi li termini della frazione , essa sarà ridotta ad una più breve espressione.

ne, senza cambiare il suo valore; ma se li termini della frazione ridotta hanno qualche altro divisore comune, essa potrà similmente essere ridotta ad una espressione più semplice, ed essa sarà sempre riduttibile ad una espressione più semplice fin a tanto, che li suoi termini avranno un fattore comune; quindi per ridurla direttamente alla sua più semplice espressione è necessario conoscere quel fattore comune de' suoi due termini, per lo quale essi essendo divisi, ne risultino per quozienti due numeri primi fra loro; ma noi abbiamo dimostrato, che qualora due numeri si dividono pe' l' loro massimo divisore comune, li quozienti, che ne risultano sono numeri primi fra loro, dunque per ridurre una frazione alla sua minima espressione, basterà dividere li suoi due termini pe' l' loro massimo comune divisore; dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Per ridurre una frazione alla sua minima espressione, si cerchi il massimo comune divisore de' due termini di essa, indi si faccia una nuova frazione, la quale abbia per suoi termini rispettivamente li quozienti, che si hanno dividendo li termini della proposta per sì fatto divisore comune.

*Composizione de' numeri
frazionarj.*

90. *Dati più numeri frazionarj addizionarli insieme.*

Dovendo le parti componenti una somma non solo essere rapportate alla medesima unità, ma ancora essere della medesima grandezza, ne segue che, se le frazioni date non hanno il medesimo denominatore, bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore; quindi volendo cercare il metodo da addizionare fra loro più frazioni date, noi supponiamo, che esse sieno già ridotte al medesimo denominatore, indi consideriamo, che qualora le frazioni, che si debbono addizionare hanno un medesimo denominatore, allora altro da noi non si dee fare se non se addizionare li numeri delle parti indicate dal denominatore di esse, ma li numeri di tali parti sono numerate dai numeratori, dunque noi dobbiamo addizionare tutti li numeratori delle frazioni date, ed alla somma che ne risulta dare per denominatore il denominatore comune di esse; il quale indica la grandezza di esse. Dal che ricaviamo la seguente regola generale. Qualora si vogliono addizionare più frazioni; 1. *Se esse hanno un denominatore comune, si addizionano li*

loro numeratori, ed alla somma, che ne risulta si dia per denominatore il denominatore comune delle frazioni date. 2. Se esse hanno diversi denominatori, si riducano prima al medesimo denominatore; e di poi si operi sulle frazioni, che ne risultano, come si è operato nel caso precedente.

Così se si vogliano addizionare le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$, noi faremo la somma de' numeratori, la quale è $5+4+6$, e ad essa daremo per denominatore il denominatore 7 delle frazioni date, e conchiuderemo che la somma ricercata è $\frac{5+4+6}{7}$, ossia $\frac{15}{7}$; ma poichè

questa frazione ha il numeratore maggiore del suo denominatore, essa contiene degli interi, noi potremo estrarli da essa dividendo il numeratore 15 per lo denominatore 7, e diremo che la somma $\frac{15}{7}$ delle frazioni date, equivale a $2+\frac{1}{7}$.

Similmente se noi dobbiamo addizionare le frazioni $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{13}{18}$, le quali hanno denominatori differenti, noi incominceremo dal ridurle al medesimo denominatore, ed avremo operando secondo la regola data (6. . .) le frazioni equivalenti $\frac{486}{648}$, $\frac{504}{648}$, $\frac{468}{648}$, la somma delle quali è $\frac{486+504+468}{648} = \frac{1458}{648} =$

$2+\frac{13}{54}$, quantità che ridotta alla minima espressione equivale a $2+\frac{1}{4}$.

Noi avremmo potuto ridurre le frazioni $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{18}$ al medesimo denominatore, dando ad esse il minimo denominatore comune, ed operando secondo la regola data (§.) ne sarebbero risultate le frazioni $\frac{37}{36}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{2}{36}$, la somma delle quali è $\frac{47}{36} = 2 + \frac{11}{36} = 2 + \frac{1}{4}$.

91. Se dovessimo addizionare quantità composte da interi uniti a frazioni, potremo incominciare dal ridurle ad espressioni frazionarie del medesimo denominatore, e di poi farne la addizione col metodo dato nel §. precedente; ma spesso è più comodo di addizionare prima le frazioni, indi gli interi, e qualora la somma delle frazioni contiene degli interi, noi possiamo estrarne gli interi, e notare sotto la colonna delle frazioni la frazione vera che ne risulta, e ritenere gli interi, che in essa si contenevano per riunirli alla somma degli interi.

Così se ci proponiamo di addizionare le quantità $3\frac{5}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $5\frac{8}{9}$; noi addizioneremo prima le frazioni, la somma delle quali è $\frac{20}{9}$, ossia $2 + \frac{2}{9}$, e scriveremo la frazione $\frac{2}{9}$ sotto la colonna delle frazioni, eviteremo le 2 unità contenute nella somma delle frazioni, le quali riunite alla somma degli interi $16\frac{2}{9}$ proposti, danno 16 unità; ed avremo $16 + \frac{2}{9}$ per la somma dimandata.

92. La addizione di una frazione più volte a se medesima valendo lo stesso che moltiplicare la frazione per lo numero delle vol-

te, che essa deve essere unita a se medesima; ne segue che la moltiplicazione di una frazione per un intero altro non è, se non se un caso particolare della addizione delle frazioni, e poichè abbiamo dimostrato, che qualora si moltiplica il numeratore di una frazione per un numero intero senza alterare il suo denominatore, la frazione si trova moltiplicata per lo stesso numero intero, noi conchiudiamo che qualora si deve moltiplicare una frazione per un numero intero, noi *moltiplicheremo il suo numeratore per lo numero intero dato, ed al prodotto daremo per denominatore lo stesso denominatore della frazione data.*

Dippiù avendo dimostrato ancora, che qualora si divide il denominatore di una frazione per un numero intero senza alterare il numeratore di essa, la frazione è moltiplicata per lo stesso numero intero, conchiudiamo, che possiamo moltiplicare una frazione per un numero intero *dividendo il denominatore di tale frazione per lo intero dato, qualora la divisione è possibile, e formare una nuova frazione, la quale abbia per numeratore il numeratore della frazione data, e per denominatore il quoziente trovato dividendo il denominatore della frazione data per lo intero dato.*

Dal che ricaviamo che noi abbiamo due metodi per moltiplicare una frazione per un

numero intero, cioè quello di moltiplicare il numeratore della frazione per lo intero dato, senza toccare il denominatore, e quello di dividere il denominatore della frazione per lo intero dato, quando la divisione sia possibile, senza alterare il suo numeratore.

Così il prodotto della moltiplicazione di $\frac{7}{15}$ per 3, potrà aversi moltiplicato 7 per 3, e dando al prodotto per denominatore il medesimo denominatore 15 della frazione pro-

posta, in modo che $\frac{7}{15} \times 3 = \frac{7 \times 3}{15} = \frac{21}{15} = 1 +$

$\frac{6}{15} = 1 + \frac{2}{5}$; oppure possiamo trovare lo stesso prodotto di $\frac{7}{15} \times 3$, dividendo per 3 il denominatore 15 della frazione proposta $\frac{7}{15}$; e formare la frazione $\frac{7}{5}$, la quale abbia per numeratore il numero 7, che era il numeratore della frazione proposta, e per denominatore il quoziente 5, il quale è nato dalla divisione del denominatore 15 della frazione data diviso per l'intero dato 3, di maniera che $\frac{7}{15} \times 3 = \frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$.

93. Da quel che abbiamo detto ricaviamo, che se noi dobbiamo moltiplicare una frazione per lo suo denominatore, il prodotto sarà lo stesso numeratore della frazione; in fatti se ci proponiamo di moltiplicare la frazione $\frac{5}{7}$ per 7, il prodotto si troverà essere la frazione $\frac{5}{1}$, la quale ha lo stesso numeratore della frazione proposta, e per denomina-

tore l'unità, che è il quoziente del denominatore 7 della frazione data diviso per lo moltiplicatore 7; ma la espressione $\frac{5}{7}$ è evidentemente eguale a 5; dunque generalmente conchiuderemo, che il *prodotto di una frazione moltiplicata per lo suo denominatore è il numeratore della medesima frazione.*

94. Proponiamoci ora di moltiplicare l'intero 5 per la frazione $\frac{3}{4}$; se noi invece di moltiplicare l'intero 5 per la frazione $\frac{3}{4}$, moltiplichiamo 5 per 3, avremo il prodotto 5×3 , il quale sarà 4 volte maggiore del prodotto di $5 \times \frac{3}{4}$, poichè noi abbiamo fatto il moltiplicatore 3 quattro volte maggiore del moltiplicatore dato $\frac{3}{4}$, dunque per avere il prodotto dimandato, bisognerà prendere la quarta parte del prodotto trovato 5×4 , quindi il prodotto di $5 \times \frac{3}{4}$ sarà $\frac{5 \times 3}{4}$; dal che ricavi-

viamo la regola generale, che per moltiplicare un intero per una frazione si *moltiplica l'intero per lo numeratore della frazione: e si dà al prodotto per denominatore lo stesso denominatore della frazione data.*

95. Qui possiamo osservare che il prodotto di $5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$; e che il prodotto di $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$; ora $5 \times 3 = 3 \times 5$, dunque $\frac{5 \times 3}{4} = \frac{3 \times 5}{4}$; dal che ricaviamo in generale, che in qua-

lunque ordine si moltiplichino due fattori, de' quali uno sia intero e l'altro frazionario, il prodotto resta sempre lo stesso.

96. Proponiamoci in ultimo luogo di moltiplicare fra loro due frazioni; sia per esempio da moltiplicarsi $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$. Se noi mul-

tiplichiamo $\frac{3}{4}$ per 5, il prodotto sarà $\frac{3 \times 5}{4}$;

ma poichè il moltiplicatore 5 è sestuplo del

moltiplicatore $\frac{5}{6}$, il prodotto trovato $\frac{3 \times 5}{4}$ è

il sestuplo del prodotto dimandato, dunque per avere il prodotto di $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$, bisognerà

prendere la sesta parte del prodotto trovato $\frac{3 \times 5}{4}$, o ciò che vale lo stesso bisognerà di-

videre $\frac{3 \times 5}{4}$ per 6; ma noi abbiamo dimo-

strato, che qualora si moltiplica il denominatore di una frazione per un numero intero, la frazione è divisa per lo stesso nume-

ro, dunque il quoziente della frazione $\frac{3 \times 5}{4}$

divisa per 6, sarà $\frac{3 \times 5}{4 \times 6}$, e per conseguenza

il prodotto di $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6}$; ma $\frac{3 \times 5}{4 \times 6}$ è il pro-

rag
 prodotto de' numeratori; e 4×6 è il pro-
 dotto de' denominatori delle frazioni date,
 dunque per moltiplicare una frazione per un-
 altra, noi moltiplicheremo li due termini del-
 l'una rispettivamente per gli due termini
 dell'altra, e formeremo la frazione, che ha
 per numeratore il prodotto de' numeratori, e
 per denominatore il prodotto de' denomina-
 tori delle frazioni date, ed essa sarà il pro-
 dotto dimandato.

96. Se si hanno più fattori frazionarj a
 moltiplicare fra loro, come per esempio,
 $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{11} \times \frac{9}{13}$, noi potremo considerare l'ul-
 tima frazione $\frac{9}{13}$ come il moltiplicatore di
 una moltiplicazione, nella quale il moltiplican-
 do sarebbe il prodotto di $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{11}$; ma in
 quest'ultimo prodotto noi possiamo conside-
 rare l'ultimo fattore $\frac{8}{11}$, come il multipli-
 catore della moltiplicazione, in cui il multi-
 plicando è il prodotto di $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$, quindi
 noi incominceremo dal moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$;

ed il prodotto $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ che ne risulta, lo multi-
 plicheremo per $\frac{8}{11}$, ed il prodotto $\frac{3 \times 5 \times 8}{4 \times 7 \times 11}$
 che si ottiene, lo moltiplicheremo per $\frac{9}{13}$, ed

otterremo per prodotto $\frac{3 \times 5 \times 8 \times 9}{4 \times 7 \times 11 \times 13}$; il qua-
 le sarà il prodotto dimandato; Ma il nume-
 ratore del prodotto trovato è il prodotto di

tutti li numeratori , ed il denominatore del medesimo prodotto è il prodotto di tutti li denominatori delle frazioni date; Dunque per trovare il prodotto di qualunque numero di frazioni , si deve formare la frazione , che ha per numeratore il prodotto de' numeratori , e per denominatore il prodotto de' denominatori delle frazioni date.

97 Qualora moltiplichiamo una frazione per un'altra per esempio $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$ noi prendiamo la sesta parte di $\frac{3}{4}$ e la ripetiamo 5 volte , o ciò che vale lo stesso noi prendiamo $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$, dunque la espressione $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$, che noi chiameremo *frazione di frazione* equivale al prodotto di $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, o di $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$, quindi *una frazione di frazione si riduce ad una frazione semplice , moltiplicando fra loro le due frazioni semplici , che la compongono* , similmente noi dimostreremo , che la *frazione di frazione di frazione* $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{6}{7}$ equivale al prodotto di $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$, ed in fatti $\frac{2}{3}$ di

$$\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{3} \text{ di } \frac{4 \times 6}{5 \times 7} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} ; \text{ e così proceden-}$$

do avanti , dal che ricaviamo in generale che qualora si vuole ridurre a frazione ordinaria una frazione di frazione di frazione ec. noi dobbiamo moltiplicare fra loro tutte le frazioni semplici che la compongono , ed il prodotto che ne risulta sarà la frazione semplice equivalente alla frazione di frazione di frazione ec. data.

98 Finalmente se dobbiamo, moltiplicare fra loro de' numeri interi uniti con frazioni, basterà ridurre li fattori composti da interi e da frazioni in espressioni frazionarie, indi moltiplicare fra loro, le espressioni frazionarie ritrovate. Così se dovessimo moltiplicare $3 + \frac{4}{5}$ per $6 + \frac{5}{7}$; noi ridurremo li due fattori dati nelle espressioni frazionarie equivalenti $\frac{19}{5}$ e $\frac{47}{7}$, indi le moltiplicheremo fra loro, ed il prodotto di $(3 + \frac{4}{5}) \times (6 + \frac{5}{7})$

$$\text{sarà } \frac{893}{35} = 33 + \frac{8}{35}.$$

99 E necessario, che qui noi riflettiamo, che la moltiplicazione di un intero per una frazione, o di una frazione per un'altra, è una operazione composta da due operazioni differenti, in fatti noi sappiamo, che qualora si moltiplica per un numero intero il solo numeratore di una frazione, essa è moltiplicata per lo stesso numero, e che qualora si moltiplica per un numero intero il solo denominatore di una frazione essa è divisa per lo stesso numero, dunque qualora noi moltiplichiamo un numero per una frazione noi moltiplichiamo per lo numeratore, e dividiamo per lo denominatore della frazione, che fa da moltiplicatore; Così moltiplicando 6 per $\frac{3}{5}$ noi abbiamo moltiplicato l'intero 6 per lo numeratore 3 della frazione moltiplicatore, ed il prodotto 6×3 lo abbiamo diviso per lo

232

denominatore 5 della medesima frazione.

Similmente moltiplicando $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{4}$, noi abbiamo moltiplicata la frazione $\frac{5}{6}$ per 3, e

di poi il prodotto trovato $\frac{5 \times 3}{6}$, lo abbiamo

diviso per 4, e da questa doppia operazione

ne è risultato il prodotto $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$.

100 In oltre se riflettiamo, che una frazione vera ha sempre il numeratore minore del denominatore, conchiuderemo, che qualora moltiplichiamo un numero per una frazione vera, noi lo moltiplichiamo per un certo numero, indi dividiamo il prodotto trovato per un numero maggiore di quello, per cui abbiamo moltiplicato il numero dato, e per conseguenza, che questa operazione composta ci fornisce un prodotto minore del moltiplicando dato, tutto il contrario di quello che accade, qualora il moltiplicatore è maggiore della unità; Queste riflessioni ci conducono ad osservare, che le parole *moltiplicare*, e *moltiplicazione*, le quali portano con loro l'idea di accrescimento sono state adoperate per designare la moltiplicazione de' numeri interi, e che se noi le adoperiamo nelle moltiplicazioni, in cui il moltiplicatore è l'unità, o una frazione di essa, noi lo facciamo dando a queste parole un senso più esteso; in

fatti quando moltiplichiamo per un numero maggiore della unità noi facciamo un prodotto, il quale è tale per rapporto al moltiplicando, quale è il moltiplicatore per rapporto alla unità ; così quando noi moltiplichiamo un numero per 4, noi troviamo un prodotto, il quale è quadruplo del moltiplicando come il moltiplicatore 4 è quadruplo della unità. Il moltiplicare un numero per 1, vale lo stesso, che prendere il moltiplicando una sola volta, locchè dà per prodotto il numero medesimo, così $7 \times 1 = 7$; ed in questo caso essendo il moltiplicatore eguale alla unità, il prodotto è anche eguale al moltiplicando, ed abbiamo ancora composto un prodotto, il quale è tale per rapporto al moltiplicando quale è il moltiplicatore per rapporto alla unità ; finalmente se moltiplichiamo un numero per una parte della unità, noi abbiamo il prodotto, il quale è quella parte del moltiplicando, che il moltiplicatore è della unità, così qualora si moltiplica 8 per $\frac{3}{4}$, il prodotto è 3 volte $\frac{3}{4}$ di 8, come il moltiplicatore $\frac{3}{4}$ è 3 volte $\frac{3}{4}$ della unità, ed anche in questo ultimo caso il prodotto è un numero, il quale è tale per rapporto al moltiplicando, quale il moltiplicatore è per rapporto alla unità. Dal che ricaviamo, che noi possiamo generalmente dire, che la *moltiplicazione è quella operazione di calcolo, per la quale essendo dati un moltiplicando ed un multipli-*

catore, noi componiamo col moltiplicando un prodotto il quale abbia al moltiplicando quel medesimo rapporto, che il moltiplicatore ha alla unità.

A R T I C O L O III.

Elevazione a Potenza delle frazioni.

101. **A**bbiamo detto, che qualora noi dobbiamo moltiplicare fra loro più fattori frazionari, il prodotto sarà la frazione, che ha per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto delli denominatori delle frazioni date; ma se li fattori dati sono fra loro eguali, li prodotti saranno le potenze di uno di essi, e secondochè li fattori eguali sono 2, 3, 4, ec. la potenza trovata sarà la potenza 2.^a, 3.^a, 4.^a ec. della frazione data; quindi qualora cherchiamo una potenza di una frazione, noi moltiplicheremo la frazione data per se medesima, prendendola per fattore tante volte quante ne indica il grado della potenza, lo che facciamo formando una frazione, che ha per termini le potenze del medesimo grado delli rispettivi termini della frazione data.

Dal che ricaviamo, che per trovare la potenza di un dato grado di una frazione data, noi dobbiamo formare una frazione che abbia per numeratore la potenza diman-

data del numeratore della frazione data e per denominatore la potenza del medesimo grado del denominatore della medesima frazione 2.^a Che la potenza ritrovata sarà tanto minore quanto il grado della potenza dimandata è maggiore, e quanto il denominatore della frazione data è maggiore del suo numeratore.

101. Se si avesse un intero unito ad una frazione, il quale si volesse elevare alla potenza di un dato grado, basterà ridurlo alla espressione frazionaria equivalente, ed indi operare su questa espressione frazionaria, seguendo la regola data per la elevazione a potenza delle frazioni.

C A P. III.

Della scomposizione delle frazioni.

A R T I C O L O I.

Della sottrazione.

103. *Dati due numeri frazionari sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Essendo la sottrazione una operazione di calcolo, per la quale, essendo data una somma, ed una delle sue parti, noi cerchiamo di conoscere l'altra parte, e dovendo la somma, e le parti che la compongono essere uni-

tà della medesima grandezza ; ne segue che qualora da una frazione si deve sottrarre un' altra frazione , esse debbono essere composte da unità frazionarie della medesima grandezza, e per conseguenza qualora le frazioni sopra delle quali si deve eseguire la sottrazione hanno denominatori differenti, noi dobbiamo ridurle al medesimo denominatore ; quindi volendo cercare il metodo da sottrarre una frazione da un' altra, noi supponiamo che esse sieno già ridotte al medesimo denominatore, indi consideriamo, che qualora le frazioni sulle quali deve essere eseguita la sottrazione hanno lo stesso denominatore, allora altro da noi non si deve fare se non se sottrarre le parti indicate dal comune denominatore contenute nel numero minore dalle parti contenute nel numero maggiore, ma li numeri di sì fatte parti sono numerate dalli numeratori delle frazioni date, dunque noi dobbiamo dal numeratore maggiore sottrarre il numeratore minore, e dare al residuo trovato per denominatore il denominatore comune di esse. Dal che ricaviamo la seguente regola generale ; Qualora da una frazione maggiore si deve sottrarre una frazione minore 1. *se esse hanno lo stesso denominatore, dal numeratore maggiore si sottragga il numeratore minore, e al residuo trovato si dia per denominatore il denominatore comune delle frazioni date* 2. *Se esse hanno diversi de-*

127

nominatori, si riducano prima le frazioni date al medesimo denominatore, e di poi si operi sulle frazioni, che ne risultano, come si è operato nel caso precedente.

Così se vogliamo sottrarre $\frac{7}{15}$ da $\frac{9}{15}$, noi faremo la differenza de' numeratori la quale è $9-7$, e ad essa daremo per denominatore il denominatore 15 delle frazioni date, e conchiuderemo, che la differenza di-

mandata è $\frac{9-7}{15}$ ossia $\frac{2}{15}$.

Similmente se dalla frazione $\frac{9}{11}$ vogliamo sottrarre la frazione $\frac{2}{9}$, noi incominceremo dal ridurle allo stesso denominatore, ed avremo le frazioni $\frac{81}{99}$, $\frac{22}{99}$, la differenza delle

quali è $\frac{81-22}{99} = \frac{59}{99}$.

104. Se dovessimo da un intero unito ad una frazione sottrarre un altro intero unito ad una frazione, noi potremmo incominciare dal ridurli ad espressioni frazionarie dello stesso denominatore, ed indi fare sopra di esse la sottrazione secondo si è detto nel §. precedente; ma spesso è più comodo sottrarre prima le frazioni, ed indi gli interi.

Così volendo da $8\frac{7}{9}$ sottrarre $5\frac{3}{9}$, noi sottrarremo prima da $\frac{7}{9}$ la frazione $\frac{3}{9}$, indi dall' intero 8, l' intero 5 ed avremo il residuo dimandato $3\frac{4}{9}$.

Similmente se da $8 \frac{3}{11}$ si dovesse sottrarre $3 \frac{2}{11}$; non potendo da $\frac{3}{11}$ sottrarre $\frac{2}{11}$ noi prenderemo una unità sopra l'intero 8, e la ridurremo ad $\frac{3}{11}$ alla quale aggiunto $\frac{3}{11}$, il numero dato $8 \frac{3}{11}$ sarà ridotto a $7 \frac{6}{11}$, dal quale sottraendo $3 \frac{2}{11}$ avremo il residuo dimandato $4 \frac{4}{11}$.

Finalmente se da 8 si dovesse sottrarre $3 \frac{5}{12}$; noi scomporremo l'intero 8 in $7 + 1 = 7 + \frac{12}{12}$, e da $7 + \frac{12}{12}$ sottratteremo $3 \frac{5}{12}$, ed otterremo il residuo dimandato $4 \frac{7}{12}$.

ARTICOLO II.

Della divisione delle frazioni.

105. *Dati due numeri de' quali almeno uno sia frazionario, dividere uno di essi per l'altro.*

I. Supponiamo in primo luogo, che si voglia dividere una frazione per un numero intero, e per fissare le idee proponiamoci di dividere $\frac{6}{2}$ per 3.

Noi sappiamo, che qualora si divide il numeratore di una frazione per un numero intero, la frazione è divisa per lo stesso numero, dunque per dividere $\frac{6}{2}$ per 3, basterà dividere il numeratore 6 della frazione dividenda data per lo divisore 3, ed il quoziente dimandato sarà $\frac{2}{2}$.

Dippiù noi abbiamo dimostrato ancora , che qualora si moltiplica il denominatore di una frazione per un numero intero , la frazione è divisa per lo stesso numero , dunque se noi moltiplicheremo il denominatore 7 della frazione dividenda $\frac{6}{7}$ per 3 , avremo la frazione $\frac{6}{21}$, la quale sarà il quoziente dimandato. Quindi noi abbiamo due metodi per dividere una frazione per un intero ; il primo è ; *si divida il numeratore della frazione dividenda per lo divisore dato , ed al quoziente si dia per denominatore il denominatore medesimo della frazione dividenda data.* Il secondo è ; *Si moltiplichì il denominatore della frazione dividenda data per la divisore dato ; e si formi una frazione che abbia per numeratore lo stesso numeratore della frazione dividenda data , e per denominatore il prodotto trovato.*

Ma qui avvertiremo , che quantunque di questi due metodi il secondo sia sempre eseguibile , ed il primo lo sia soltanto nel caso , che il numeratore della frazione dividenda sia esattamente divisibile per lo divisore dato , pure tutte le volte , che esso sarà eseguibile deve essere adoperato di preferenza al secondo , perchè il quoziente viene espresso in termini più semplici

2.° Proponiamo di dividere un intero per una frazione , e sia per esempio da dividere 8 per $\frac{3}{5}$, se noi supponiamo per un mo-

mento che il divisore sia 3, il quoziente sarà $\frac{8}{3}$; ma dividendo 8 per 3, noi abbiamo preso per divisore il numero 3 il quale è quintuplo del divisore dato $\frac{1}{5}$, e da noi si è dimostrato, che qualora il divisore si moltiplica per un numero intero il quoziente si trova diviso per lo stesso numero, dunque il quoziente trovato $\frac{8}{3}$ è la quinta parte del quoziente dimandato, e perciò per fare sì che il quoziente trovato $\frac{8}{3}$ si riduca al quoziente di 8 diviso per $\frac{1}{5}$ si deve moltiplicare per 5, ma

$$\frac{8}{3} \times 5 = \frac{8 \times 5}{3}; \text{ ed } 8 \times 5 \text{ è il prodotto dell' intero}$$

dividendo dato 8 per lo denominatore 5 della frazione divisore, ed il denominatore 3 è il numeratore della medesima frazione divisore, dunque generalmente, qualora si deve dividere un intero per una frazione, *si moltiplichi l' intero dividendo per lo denominatore della frazione divisore, ed al prodotto che ne risulta si dia per denominatore il numeratore della medesima frazione divisore.*

Qui possiamo ridettere, che dividendo

$$8 \text{ per } \frac{1}{5}, \text{ il quoziente è } \frac{8 \times 5}{3}; \text{ e che multi-}$$

plicando 8 per $\frac{5}{3}$, che è la frazione divisore

$$\text{rovesciata, il prodotto è anche } \frac{8 \times 5}{3}, \text{ dunque}$$

il quoziente di un intero diviso per una fra-

zione è lo stesso del prodotto, che si ottiene moltiplicando il dividendo per la frazione divisore rovesciata, quindi possiamo dire; che qualora si deve dividere un intero per una frazione noi dobbiamo moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata.

3. Proponiamo in ultimo luogo di dividere una frazione per un'altra frazione, e sia per esempio da dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$.

Supponiamo per un momento, che $\frac{3}{4}$ debba dividersi soltanto per 5, per le cose dette il quoziente sarà $\frac{3}{4 \times 5}$, ma noi dividendo

per 5 abbiamo preso per divisore un numero, il quale è settuplo del divisore dato $\frac{5}{7}$, dunque il quoziente trovato $\frac{3}{4 \times 5}$ è la setti-

mana parte del quoziente di $\frac{3}{4}$ diviso per $\frac{5}{7}$, e per conseguenza è tale, che moltiplicato per 7 darà il quoziente dimandato, dunque il

quoziente di $\frac{3}{4}$ diviso per $\frac{5}{7}$ sarà $\frac{3}{4 \times 5} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$;

ma 3×7 è il prodotto del numeratore 3 della frazione dividenda per lo denominatore 7 della frazione divisore, e 4×5 è il prodotto del denominatore 4 della frazione dividenda per lo numeratore 5 della frazione divisore, dunque per trovare il quoziente di una frazione divisa per un'altra, noi faremo una frazione la quale abbia per numeratore il

prodotto del numeratore della frazione dividenda per lo denominatore della frazione divisore, e per denominatore il prodotto del denominatore della frazione dividenda per lo numeratore della frazione divisore.

Qui ritetteremo, che dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$

noi abbiamo trovato il quoziente $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$, e che

se da noi si moltiplicasse $\frac{3}{4}$ per $\frac{7}{5}$, che è la frazione divisore rovesciata, il prodotto sa-

rebbe anche $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$; Quindi conchiuderemo, che

qualora si deve dividere una frazione per un'altra noi dobbiamo moltiplicare la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata.

106. Se si dovesse dividere un intero unito ad una frazione per un intero unito ad una frazione, noi incominceremo dal ridurre le quantità date alle espressioni frazionarie ad esse equivalenti, ed indi sopra di tali espressioni frazionarie opereremo secondo la regola data.

107. Da quel, che abbiamo detto relativamente alla divisione, qualora il divisore è una frazione, ne ricaviamo che essa è una operazione composta da una divisione, e da una moltiplicazione, giacchè noi moltiplichiamo il dividendo per lo denominatore della frazione divisore, e lo dividiamo per lo nu-

meratore della medesima frazione; ma essendo nelle frazioni vere il denominatore maggiore del numeratore, noi moltiplichiamo il dividendo dato per un numero, e lo dividiamo per un numero minore di quello, per cui lo abbiamo moltiplicato; dunque il quoziente di un dividendo diviso per una frazione vera è maggiore del dividendo dato, tutto all'opposto di quello che accade qualora il divisore è maggiore della unità. Lo che ci conduce a fare sopra le parole *divisione*, e *dividere* le medesime osservazioni, che abbiamo fatte sopra le parole *moltiplicazione*, e *moltiplicare*; le parole *divisione*, e *dividere* le quali portano con esse la idea della diminuzione sono state da principio adoperate per indicare le divisioni, nelle quali il divisore è un numero intero; indi estendendo la loro significazione sono state adoperate per indicare le divisioni, nelle quali il divisore è l'unità, o una frazione, in fatti dividendo un numero per un numero maggiore della unità noi lo diminuiamo, dividendolo per la unità esso non si altera, dividendolo per un numero minore della unità esso si aumenta; ma poichè in tutti li casi il prodotto del divisore per lo quoziente deve riprodurre il dividendo, ne segue che noi possiamo in tutti li casi considerare il dividendo come un prodotto, di cui il divisore, ed quoziente sono li fattori, e possiamo considerare la divisione

come il metodo per mezzo del quale, qualora sono noti il prodotto ed uno de' fattori c una moltiplicazione si determina l'altro fattore.

Finalmente poichè in tutti li casi della divisione il dividendo è il prodotto del divisore per lo quoziente, ne segue che il quoziente deve essere tale per rapporto al dividendo, quale l'unità è per rapporto al divisore talmente che possiamo generalmente dire, che *la divisione è quella operazione di calcolo per mezzo della quale essendo dato un dividendo ed un divisore noi componiamo un quoziente il quale abbia al dividendo quel medesimo rapporto, che l'unità ha al divisore*

108. Da quanto abbiamo detto finora evidentemente ricaviamo 1. che le operazioni de calcolo, che noi possiamo fare sopra de' numeri interi si riducono a due sole, cioè all'addizione, ed alla sottrazione; nel mentre che le frazioni eseguono quattro operazioni essenzialmente differenti, cioè la addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione; e che per conseguenza le frazioni hanno introdotte nel calcolo due nuove operazioni

2. Che passando dal calcolo de' numeri interi al calcolo delle frazioni, abbiamo dovuto generalizzare le definizioni delle operazioni del calcolo, ed il senso attaccato alle parole

ARTICOLO III.

*Determinazione delle frazioni semplici, dalla
moltiplicazione delle quali è prodotta
una frazione data.*

109. Quando abbiamo moltiplicate più frazioni, non abbiamo trovato il prodotto di esse formando una nuova frazione, alla quale abbiamo dato per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle frazioni date; quindi si vede, che qualora da noi si volesse sapere, quali sono le frazioni semplici, dalla moltiplicazione delle quali è nata una frazione proposta, noi dobbiamo 1.^o cercare tutti li fattori semplici de' due termini della frazione proposta. 2.^o Indi formare tante frazioni semplici con li fattori primi già trovati de' due termini della frazione proposta, quanti sono li fattori primi di quel termine della proposta, che ha il maggior numero di fattori, rimpiazzando con l'unità tutti li fattori, che si trovano mancanti, nel caso che li due termini non abbiano lo stesso numero di fattori.

110. Qui avvertiremo, che qualora li termini di una frazione data sono numeri primi, essa è indecomponibile, e perciò la chiameremo *frazione semplice*, e diremo il nome di *frazioni composte*, o *frazioni multiple* a quelle, che sono il prodotto di più frazioni semplici.

Estrazione delle radici dalle frazioni.

111. **P**er terminare la teoria delle frazioni resta solo, che da noi si cerchi il metodo da estrarre da una frazione data la sua radice di un grado dato.

Essendo la operazione della estrazione della radice la inversa di quella per la quale si è trovata la potenza, ne segue, che qualora da una data frazione si vuole estrarre la radice, dobbiamo sopra della frazione data eseguire la operazione inversa di quella, per la quale noi troviamo la potenza di una frazione, ma per avere la potenza di un dato grado di una frazione proposta noi formiamo la frazione, che ha per suoi termini li termini della proposta elevati alla potenza dimandata; dunque, per avere *la radice di una frazione data* dobbiamo formare una frazione, la quale abbia per suoi termini le radici del grado dimandato de' rispettivi termini della frazione data.

Così se vogliamo la radice quadrata della frazione $\frac{25}{81}$, essa sarà $\frac{5}{9}$; ed in questo caso la frazione proposta avendo il numeratore, ed il denominatore ambidue quadrati perfetti, noi abbiamo ottenuta la sua radice quadrata esatta. Similmente se avessimo dovuto estrar-

re la radice cubica della frazione $\frac{6^3}{2^3 \cdot 3^3}$, nella quale li due termini sono cubi perfetti, noi avremmo trovato, che la radice cubica esatta della frazione proposta $\frac{6^3}{2^3 \cdot 3^3}$ è $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ma potrebbe darsi il caso, che la frazione proposta non sia la potenza esatta di un'altra frazione, ed allora possono darsi tre casi I. Che il numeratore non sia una potenza esatta del grado della radice dimandata II. Che il numeratore essendo potenza esatta, il denominatore non lo sia. III. Che ambi due li termini non sieno potenze esatte.

Così se noi dovessimo estrarre la radice quadrata da $\frac{1^9}{2^9}$, noi osserveremo, che questa frazione non può essere il quadrato perfetto di un'altra frazione; poichè in tale caso ambi li termini della frazione proposta dovrebbero essere quadrati perfetti, quindi noi estrarremo la radice prossima di 18, che è 4, e la radice quadrata esatta del denominatore, che è 5, e diremo che la radice quadrata prossima della frazione data $\frac{1^9}{2^9}$ è $\frac{4}{5}$, e dippiù diremo che essa differisce dalla radice quadrata esatta di $\frac{1^9}{2^9}$ di una quantità minore di $\frac{1}{5}$. Similmente se ci proponiamo di estrarre la radice cubica della frazione $\frac{3^3}{6^3}$, della quale il solo denominatore è un cubo perfetto, noi troveremo, che la radice prossima di essa è $\frac{3}{4}$, e che essa differisce dalla radice cubica esatta della frazione $\frac{3^3}{6^3}$ di una quantità minore di $\frac{1}{4}$; di maniera, che qualora soltanto il de-

nominatore di una frazione è una potenza perfetta del grado della radice dimandata, noi troviamo la radice prossima di essa, trovando la radice massima del grado dimandato contenuta nel numeratore della frazione data, dando ad essa per denominatore la radice del medesimo grado del denominatore della frazione data, conchiudendo che la frazione così trovata è la radice prossima della frazione data, e che essa manca dalla radice esatta della frazione proposta di una quantità minore di una unità frazionaria della specie di quelle, che sono determinate dal denominatore della radice trovata.

Il. Supponiamo ora, che debba estrarsi la radice quadrata della frazione $\frac{16}{81}$, nella quale il solo numeratore sia quadrato perfetto, allora se estraiamo la radice quadrata dalli suoi termini, troveremo, che la radice esatta del numeratore è 4, e che quella del denominatore non può averli esattamente, quindi trovandola per approssimazione, se noi prendiamo per radice 6, che è la prossima inferiore, diremo che la radice prossima alla vera di $\frac{16}{81}$ è $\frac{4}{6}$, e poicchè il denominatore di $\frac{4}{6}$ è minore del denominatore, che dovrebbe avere la radice esatta di $\frac{16}{81}$, conchiuderemo, che la radice trovata $\frac{4}{6}$ è maggiore della radice esatta di $\frac{16}{81}$, ma non potremo stimare quanto sia l'eccesso della radice trovata sopra la vera radice della frazione proposta

similmente se prendiamo per radice di $\frac{8}{9}$ la frazione $\frac{2}{3}$, conchiuderemo che essa è minore della radice esatta di $\frac{8}{9}$, senza però potere apprezzare quanto sia l'errore, che da noi si commette prendendola per radice della frazione data.

Similmente vedremo, che dandosi lo stesso caso, qualora ci proponiamo di estrarre la radice cubica da una frazione, della quale il solo numeratore è un cubo perfetto, estraendo la radice da ambi li termini di essa, possiamo trovare una radice cubica prossima alla vera della frazione data, la quale disferisca dalla vera o in eccesso, o in indifetto, senza potere però determinare fra quali limiti è compreso l'errore, che da noi si commette.

III. Sia da estrarsi la radice quadrata dalla frazione $\frac{12}{56}$, in cui nissuno de' termini è quadrato perfetto, se prendiamo per tale radice la frazione $\frac{3}{7}$, in cui il numeratore è minore della radice del numeratore 12, ed il denominatore 7 è anche minore della radice del denominatore 56 della proposta, noi abbiamo una frazione, la quale differisce dalla vera radice dimandata, ma in maniera da non potere determinare fra quali limiti è compreso l'errore, che noi commettiamo, giacchè per lo numeratore troppo piccolo facciamo un errore in difetto, e per lo denominatore anche troppo piccolo facciamo un errore in eccesso, e non abbiamo mezzi da veg

dere fino a quale punto questi errori si compensano, e se la radice trovata è prossima in eccesso, o in difetto, e per conseguenza essa è di nessun uso. Or non potendo in questi due ultimi casi fare alcun uso delle radici prossime trovate, a cagione, che non possiamo estimare quanto sia l'errore, che si commette prendendo per radice della frazione data quella da noi trovata, dobbiamo cercare il metodo da potere, in questi due casi, in cui la radice non si può avere esattamente, trovare la radice prossima alla vera, in maniera da potere estimare l'errore, che da noi si commette, locchè noi conseguiremo trasformando la frazione data in un'altra equivalente, ma tale che il denominatore sia una potenza perfetta del grado della radice dimandata.

Quindi se si debba estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{16}{32}$, moltiplicando ambidue i termini di essa per 32, avremo $\frac{16}{32} = \frac{16 \times 32}{32 \times 32}$, e la radice di $\frac{16}{32}$ equivalerà alla radice di $\frac{16 \times 32}{32 \times 32}$, or egli è evidente, che la frazione $\frac{16 \times 32}{32 \times 32}$ avendo il denominatore, il quale è il quadrato di 32, se noi estraiamo la radice

quadrata dalli suoi termini , troveremo una frazione , la quale ha per denominatore 32 , e per conseguenza avremo la radice della frazione data , la quale sarà minore della radice vera di una quantità minore di $\frac{1}{32}$.

Se si dimandasse la radice quadrata di $\frac{n}{42}$, della quale li due termini non sono quadrati perfetti , allora moltiplicando sì il numeratore che il denominatore per 42 , avremo la fra-

zione $\frac{8 \times 42}{42 \times 42}$, nella quale il denominatore è

un quadrato perfetto , ed estraendo da' suoi termini la radice quadrata , avremo la sua radice prossima espressa da una frazione , in cui il denominatore è esattamente 42 , e diremo che la radice quadrata trovata è la radice prossima di $\frac{n}{42}$, e differisce dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{42}$.

Supponiamo ora che si dimandi la radice cubica di $\frac{n}{130}$, frazione in cui il solo numeratore è un cubo perfetto ; noi vediamo in conseguenza di un raziocinio simile a quello , che abbiamo fatto nello stesso caso relativamente alla radice quadrata , che estraendo la radice cubica esatta dal numeratore , e la prossima sia in eccesso , sia in difetto dal denominatore , la frazione che ne risulta , dà una radice inesatta tale , che da noi non può essere apprezzato l'errore che si commette , e perciò di nissun uso ; quindi conosciamo

la necessità di trasformare la frazione data $\frac{27}{130}$ in un'altra equivalente, la quale abbia il denominatore, che sia un cubo perfetto, locchè otterremo moltiplicando ambi li termini della frazione data per lo quadrato del suo de-

nominatore, ed avremo $\frac{27}{130} = \frac{27 \times 130 \times 130}{130 \times 130 \times 130}$

ed estraendo dalla frazione trovata la radice cubica, avremo una frazione, la quale avrà per denominatore 130, e conchiuderemo, che la radice cubica trovata, non solo è la radice cubica prossima della frazione data, ma ancora che essa differisce dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{130}$.

Similmente ragionando, noi vedremo, che la radice cubica prossima alla vera della frazione $\frac{32}{78}$, si troverà trasformando la fra-

zione data $\frac{32}{78}$ in $\frac{32 \times 78 \times 78}{78 \times 78 \times 78}$, ed estraendo

da essa la radice cubica prossima alla vera, la quale sarà espressa da una frazione, che ha per denominatore 78, e ci indicherà che essa manca dalla radice vera della frazione data di una quantità minore di $\frac{1}{78}$.

Estendendo il medesimo raziocinio alla estrazione della radice di qualunque grado da una frazione, ricaveremo in generale. *1. che qualora la frazione ha li suoi due termini ambi due potenze perfette del grado della*

radice dimandata , noi avremo la radice dimandata esatta della frazione data facendo una frazione , la quale abbia per suoi termini le radici del grado dimandato de' rispettivi termini della proposta. II.^o Che qualora il solo denominatore è potenza perfetta del grado della radice dimandata, allora avremo la radice cercata della frazione data , facendo una frazione , della quale il numeratore sia la radice prossima del grado dimandato del numeratore della frazione data , ed il denominatore la radice del medesimo grado del denominatore di essa , e questa radice sarà la radice prossima alla vera della frazione proposta , che farà minore della radice esatta di una quantità minore di una unità frazionaria , la quale sarà denominata dal denominatore della medesima radice. III.^o Che qualora o il solo denominatore della frazione proposta, o ambi li suoi termini non sono potenza perfetta del grado della radice dimandata, allora si moltiplichino ambi li termini della frazione proposta per la potenza del denominatore , il grado della quale sia quello della radice dimandata diminuito di una unità , indi si formi una frazione la quale abbia per numeratore la radice prossima del numeratore della nuova frazione, e per denominatore il denominatore medesimo della frazione proposta ; e questa frazione sarà

la radice prossima della frazione data , ed essa differirà dalla radice esatta di una quantità minore di una unità frazionaria denominata dal denominatore della proposta.

113. Qualora si debba estrarre una radice da una quantità composta da un intero e da una frazione , dopo di averla ridotta in espressione frazionaria , si estrarrà da essa la radice dimandata , secondo li metodi dati per la estrazione delle radici dalle frazioni.

114. Noi qui osserveremo , che essendo una radice un fattore , che moltiplicato per se medesimo produce una potenza , le radici delle frazioni vere saranno sempre maggiori delle potenze , ed esse le sorpassano tanto più , quanto più alto è il loro grado , e quanto più il denominatore eccede il suo numeratore.

C A P. IV.

Teoria de' Decimali.

Nozioni preliminari.

115. **L**a difficoltà , che si incontra nella calcolazione delle frazioni ha fatto conoscere la necessità di sottomettere le suddivisioni della unità ad una legge costante di decrescenza ; legge la quale si ricava facilmente dal metodo , col quale si scrivono con cifre li numeri interi. In fatti noi sappiamo , che le cifre

per mezzo delle quali noi scriviamo un numero intero esprimono unità decuple le une delle altre, secondocchè avanziamo dalla destra verso la sinistra, e per conseguenza che esse esprimono quantità suddecuple le une delle altre a misura, che dalla sinistra ritorniamo verso la destra; dal che concludiamo, che se noi scriviamo una cifra a destra di quella delle unità semplici, essa esprimerà unità suddecuple della unità principale, ossia parti decime di essa, la cifra, che scriveremo a destra di quella, che esprime le parti decime, rappresenterà parti decime delle decime, ossia centesime della unità, quella posta alla destra della cifra delle centesime rappresenterà parti decime delle centesime, ossia le millesime della unità, e così procedendo innanzi; locchè ci dà il mezzo da scrivere sotto la forma de' numeri interi, cioè senza denominatori, le frazioni della unità, che hanno per denominatori li numeri 10, 100, 1000 ec., cioè le frazioni, che hanno li denominatori formati dalla unità seguita da uno o da più zeri, le quali disegnano parti suddecuple della unità, e che noi chiameremo *frazioni decimali*, o semplicemente *decimali*.

116. Da quanto abbiamo detto possiamo concludere, che esse saranno più facili a combinarsi, e noi renderemo molto più semplici li calcoli, se giugneremo a trovare il metodo da ridurre qualunque frazione alla for-

ma delle frazioni decimali, quindi noi ci occuperemo di esse cercando di scoprire le proprietà, che le caratterizzano, ricavandole dalle proprietà delle frazioni ordinarie, le quali appartengono generalmente a qualunque sorta di frazioni.

117. Supponiamo in primo luogo che sia data la frazione $\frac{680}{1000}$, la quale è una frazione decimale scritta sotto la forma delle frazioni ordinarie, e proponiamoci di scoprire il metodo da scriverla sotto la forma decimale; egli è evidente che essa può essere scomposta nelle tre frazioni parziali $\frac{600}{1000}$, $\frac{80}{1000}$, e che per conseguenza essa equivalerà a $\frac{600}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{0}{1000}$; e supprimendo li zeri comuni alli due termini di esse, sarà $\frac{680}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{8}{100} + \frac{0}{1000}$; ma noi sappiamo, che secondo la legge della numerazione una cifra posta alla destra di una altra esprime unità suddecuple, quindi ne segue, che la cifra 6 indicherebbe parti decime della unità, se si scrivesse a destra del posto assegnato alla cifra delle unità semplici, e poicchè in questo caso noi non abbiamo unità semplici, noi scriveremo un zero per occuparne il luogo, ed a destra del zero scriveremo la cifra 6, e la separeremo dal zero per mezzo di una virgola, a fine di distinguere la parte intera del numero dalla parte frazionaria, e noi avremo $0,7 = \frac{7}{10}$; similmente designando la cifra 8 parti centesime della uni-

rà, ossia parti 10 volte minori delle decime dovrà essere scritta a destra della cifra 7, ed avremo 0, $78 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100}$, e finalmente la cifra 9, che disegna parti inillesime della unità, ossia parti decime delle centesime, dovrà essere scritta a destra della cifra 8 delle centesime, ed avremo 0, $789 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$ ma noi abbiamo veduto, che la frazione data $\frac{789}{1000} = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$, dunque $\frac{789}{1000} = 0,789$.

Similmente se si volesse scrivere sotto la forma decimale la frazione $\frac{6587}{1000}$, noi la scomporremo nelle frazioni parziali $\frac{6}{1000}$, $\frac{500}{1000}$, $\frac{80}{1000}$, $\frac{7}{1000}$, e supprimendo li zeri comuni alli due termini di esse, noi troveremo, che la frazione data $\frac{6587}{1000} = \frac{6}{1000} + \frac{5}{100} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$, e ragionando come abbiamo fatto nel caso precedente, noi troveremo che $\frac{6587}{1000} = 6,587$.

Proponiamoci in ultimo luogo di scrivere sotto la forma decimale la frazione $\frac{75}{1000}$, ragionando come ne' casi precedenti, noi troveremo, che $\frac{75}{1000} = \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{7}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{1000}$, e per conseguenza essa equivale a 0, 075.

Osservando la maniera, come abbiamo operato per iscrivere sotto la forma di un numero intero una frazione decimale scritta sotto la forma di frazione ordinaria, noi vediamo, che noi abbiamo scritto il suo numeratore, e da esso abbiamo separate per mezzo di una virgola tante cifre alla destra, quanti sono li zeri del denominatore, dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si deve scrivere una frazione decimale sotto la forma di un numero intero, si scriva il suo numeratore, e da esso si separino per mezzo di una virgola tante cifre a destra, quante ne indica il numero de' zeri del denominatore, badando a scrivere de' zeri a sinistra delle cifre significative nel luogo delle cifre mancanti, se per caso tale numeratore avesse un numero di cifre minore di quello delli zeri del denominatore.

116. Proponiamoci ora la quistione inversa, cioè data una frazione decimale scritta sotto la forma di numero intero, scriverla sotto la forma di frazione ordinaria. Supponiamo, che il numero decimale 9, 0748 si debba scrivere sotto la forma di frazione ordinaria. Poichè secondo la legge della numerazione qualunque cifra disegna sempre unità suddecuple di quelle, che indica la cifra che la precede a sinistra, la cifra 7 disegnerà unità 100 volte minori di quelle che disegna la cifra 9, che la precede di due posti a sinistra, ma la cifra 9 disegna le unità, dunque la cifra 7 disegnerà parti centesime di essa, e perciò essa sarà espressa da $\frac{7}{100}$, collo stesso raziocinio noi vediamo, che le cifre 4, 8 disegnano rispettivamente parti millesime, e diecimillesime della unità, e che per conseguenza sono espresse dalle frazioni $\frac{4}{1000}$, $\frac{8}{10000}$; dunque il numero decimale 9, 0748 = $9 + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000}$, e riducendo ad

unità della minima specie, sarà $9,0748 = \frac{90748}{10000}$
 $+ \frac{700}{10000} + \frac{0}{10000} + \frac{0}{10000} = \frac{90748}{10000} = 9 + \frac{748}{10000}$;
 Dal che ricaveremo, che per ridurre a forma
 di frazione ordinaria un numero decimale
 scritto sotto la forma di numero intero, noi lo
 scriveremo senza fare attenzione alla virgo-
 la, e daremo ad esso per denominatore l'
 unità seguita da tanti zeri, quanti ne indi-
 ca il numero delle cifre, che sono alla de-
 stra della virgola, oppure scriveremo l'inte-
 ro, e ad esso aggiungeremo la parte decima-
 le, alla quale daremo per denominatore la
 unità seguita da tanti zeri quanti ne indi-
 ca il numero delle cifre, che sono alla de-
 stra della virgola.

119. Le cose fin qui dette ci fanno co-
 noscere la maniera, che dobbiamo tenere per
 enunciare un decimale scritto alla maniera
 di un numero intero; in fatti per enunciare
 un decimale, noi dobbiamo enunciare il nume-
 ratore ed il denominatore della espressione
 frazionaria, alla quale si riduce il numero
 decimale dato, quindi noi vediamo, che
 dobbiamo metterlo sotto forma di espressio-
 ne frazionaria, e perciò stabiliremo la seguen-
 te regola generale, qualora noi vogliamo enun-
 ciare un numero decimale, si enunci come
 numero intero facendo astrazione della vir-
 gola, indi per fare conoscere la specie del-
 le sue unità decimali, si enunci il suo deno-
 minatore, il quale è sempre l'unità seguita

da tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre che sono alla destra della virgola; oppure si enuncj la sua parte intera aggiungendovi la parola unità, e di poi la parte decimale come abbiamo detto.

Essendo $3 + \frac{45}{100} = 3 + \frac{450}{1000} = 3 + \frac{4500}{10000}$ ec. ne segue che non si altera il valore di un decimale, qualora alla sua destra si scriva un numero qualunque di zeri, come similmente, se esso è terminato alla sua destra da zeri, si possono i fatti zeri supprimere senza che il suo valore sia alterato.

120. Sia il numero decimale 38, 748, ed in esso si avvanzi la virgola di un posto verso la destra, allora avremo il decimale 387, 48, nel quale la cifra 3 che occupava il posto delle decine, occupa quello delle centinaia, la cifra 8 che occupava il posto delle unità, occupa quello delle decine, la cifra 7 che occupava il posto delle parti decime, occupa quello delle unità, la cifra 4 che occupava il luogo delle parti centesime, occupa quello delle parti decime, e la cifra 8 che occupava il posto delle parti millesime, occupa quello delle parti centesime, quindi ciascuna delle parti del numero decimale dato ha acquistato un valore decuplo, e perciò tutto il numero decimale dato è stato moltiplicato per 10; Similmente si dimostra, che qualora la virgola si avvanza di due posti verso la destra, il decimale è moltiplicato per 100,

che qualora essa si avvanza di tre posti, il decimale è moltiplicato per 1000, e così procedendo avanti. Dal che generalmente concludiamo, che qualora *in un numero decimale si avvanza la virgola di uno, due, tre etc. posti verso la destra*, esso è moltiplicato per 10, per 100, per 1000 etc.

121. Quindi se noi ci proponiamo di moltiplicare un numero decimale per un numero composto dalla unità seguita a destra da uno, o più zeri, noi avvanzeremo la virgola di tanti passi verso la destra del moltiplicando, quanti ne indica il numero de' zeri del moltiplicatore, e se si desse il caso, che nel moltiplicando il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola, sia minore del numero de' zeri del moltiplicatore, allora prima aggiugneremo de' zeri alla destra del moltiplicando, indi avvanzeremo la virgola secondo la regola data.

Così se noi ci proponiamo di moltiplicare 36, 48 per 10000, noi incominceremo dallo aggiugnere due zeri alla destra del moltiplicando, ed avremo $36, 48 = 36, 4800$, indi nel numero 36, 4800 avvanzeremo la virgola di quattro passi verso la destra, ed avremo $364800 = 36, 48 \times 10000$.

122. Ragionando della medesima maniera vedremo, che qualora si trasporta la virgola verso la sinistra di un decimale,

esso si trova diviso per 10, 100, 1000 etc., secondo che la virgola avrà fatto uno, due, tre, etc. passi verso la sinistra; dal che concludiamo generalmente, che qualora in *un decimale trasportiamo la virgola verso la sinistra, il decimale sarà diviso per 10, 100, 1000 etc. secondo che la virgola avrà fatto uno, due, tre etc. passi.*

123. Quindi se noi ci proponiamo di dividere un decimale per la unità seguita alla destra da uno, o più zeri, *basterà trasportare la virgola verso la sinistra, facendo ad essa fare tanti passi, quanti ne indica il numero delli zeri del divisore, e che se nel dividendo il numero delle cifre, che sono alla sinistra della virgola è minore del numero de' zeri del divisore, allora prima aggiungeremo de' zeri alla sinistra del dividendo dato, indi porteremo la virgola dalla destra verso la sinistra, facendo ad essa dare tanti passi, quanti ne indica il numero de' zeri del divisore.*

Così se ci proponiamo di dividere per 1000 il numero decimale 3, 74, noi incominceremo dallo aggiungere due zeri alla sinistra di 3, 74, ed avremo 3, 74=003, 74, indi osservando, che il divisore 1000 ha tre zeri, avvanzeremo la virgola di tre posti verso la sinistra, ed avremo 0, 00374 per lo quoziente di 3, 74 diviso per 1000.

Composizione de' numeri decimali.

A R T I C O L O I.

Addizione delli decimali.

124. Quando abbiamo trovata la regola della addizione de' numeri interi, noi la abbiamo ricavata dal vedere, che andando dalla destra verso la sinistra, dieci unità di un ordine formano una unità dell'ordine superiore, ma le unità de' numeri decimali sono sottoposte alla medesima legge, dunque la addizione delli decimali si eseguirà secondo la medesima regola, che abbiamo adoperata per gli numeri interi.

Proponiamoci per esempio di addizionare li numeri decimali 36, 584, e 9, 72 ossia 36, 584, e 9, 720, noi li disporremo come qui a fianco, indi operando come se fossero numeri interi avremo 46, 304 per la somma dimandata. Qui avvertiamo, che noi abbiamo aggiunto un zero alla destra del numero decimale 9, 72 per fare sì, che li numeri dati fossero ridotti allo stesso denominatore, ma noi ci accorgiamo, che la operazione avrebbe dato il medesimo risultato, se non avessimo scritto il zero

alla sua destra, facendo però attenzione a situare le parti decime sotto le decime, le centesime sotto le centesime etc. de' numeri dati. Quindi conchiuderemo, che la operazione della addizione de' numeri decimali si esegue come quella de' numeri interi, disponendo li numeri decimali dati gli uni sotto gli altri, facendo attenzione di situarli in modo, che le cifre, che indicano numeri composti da unità del medesimo grado, sieno posti nella medesima colonna verticale.

ARTICOLO II.

Moltiplicazione de' numeri decimali.

125. **P**roponiamoci di moltiplicare 3, 48 per 7, 9. Per trovare la regola secondo la quale deve essere eseguita questa operazione, osserveremo, che se noi facciamo dare alla virgola due passi verso la destra nel moltiplicando, avremo il numero 348, il quale è eguale al moltiplicando $3,48 \times 100$; Similmente avanzando nel moltiplicatore la virgola di un rango verso la destra, noi avremo lo intero 79. il quale equivalerà al moltiplicatore $7,9 \times 10$; quindi se in vece di moltiplicare fra loro li numeri decimali dati, noi moltiplichiamo 348 per 79, avre-

mo il prodotto 27492, il quale è nato da un moltiplicando, il quale è il moltiplicando dato moltiplicato per 100, e da un moltiplicatore, il quale è il moltiplicatore dato moltiplicato per 10, ma si è dimostrato, che qualora in una moltiplicazione il moltiplicando si moltiplica per un numero, ed il moltiplicatore si moltiplica per un altro numero, il prodotto si trova moltiplicato per lo prodotto de' due numeri, che hanno moltiplicato il moltiplicando ed il moltiplicatore, dunque il prodotto 27492 è il prodotto dimandato moltiplicato per 100×10 , ossia per 1000; quindi se esso si dividerà per 1000, noi avremo il prodotto di

$$3,48 \times 7,9; \text{ dunque } \frac{27492}{1000} = 3,48 \times 7,9,$$

$$\text{ma } \frac{27492}{1000} = 27,492, \text{ dunque } 3,48 \times 7,9 =$$

27,492; ma noi osserviamo, che 27,492 è il prodotto de' due numeri decimali dati considerati come numeri interi, dal quale si sono separati per mezzo di una virgola andando dalla destra verso la sinistra tante cifre, quante sono le cifre decimali delli due fattori, dunque noi ricaveremo la seguente regola generale; qualora debbono moltiplicarsi fra loro due numeri decimali, si moltiplichino come se fossero numeri interi, facendo astrazione della virgola, e dal

prodotto si separino, andando dalla destra verso la sinistra, tante cifre decimali, quante ne sono nelli due fattori.

126. Il prodotto de' numeri decimali è lo stesso di quello delle espressioni frazionarie ad essi equivalenti, ma il prodotto delle espressioni frazionarie non si altera qualunque sia l'ordine, secondo il quale li fattori si moltiplichino, dunque *il prodotto di due numeri decimali non si altera, qualunque sia l'ordine secondo il quale si moltiplichino li fattori.*

A R T I C O L O III.

Elevazione a potenza de' numeri decimali.

127. **L**i numeri decimali altro non sono se non se espressioni frazionarie ordinarie, nelle quali il denominatore è indicato dalla unità, alla destra della quale seguono tanti zeri, quante sono le cifre, che sono alla destra della virgola, quindi esse debbono essere sottoposte alle medesime regole, alle quali sono sottoposte le espressioni frazionarie ordinarie, ma qualora una espressione frazionaria si deve elevare alla potenza di un dato grado, si elevano a tale potenza li suoi due termini, dunque qualora si vuole la potenza di qualunque grado di un deci-

male dato, dobbiamo elevare alla potenza dimandata li suoi due termini, ma la potenza di un numero composto dalla unità seguita da zeri è sempre formata dalla medesima unità seguita dal numero de' zeri, che contiene la radice, moltiplicato per lo numero, che esprime il grado della potenza, dunque il denominatore della potenza del numero decimale è la unità seguita da tanti zeri, quanti ne contiene la radice, ripetuti tante volte, quante ne indica il numero delle unità, che contiene il grado della potenza; ma volendo scrivere questa espressione frazionaria sotto la forma di un numero intero, si scrive il suo numeratore, dalla destra del quale si separano, per mezzo della virgola, tante cifre decimali, quanti sono li zeri del denominatore, ed i zeri del denominatore sono tanti quanti ne disegna il prodotto, che nasce moltiplicando il numero de' zeri, che contiene il denominatore della radice per lo grado della potenza dimandata, dunque la potenza del decimale dato si trova elevando alla potenza dimandata il decimale dato considerato come numero intero, e separando dalla destra di esso tante cifre decimali, quante ne indica il prodotto, che nasce moltiplicando il numero de' zeri del denominatore del decimale dato per lo grado della potenza dimandata.

Così volendo elevare 7, 34 al quadrato, noi faremo il quadrato di esso come se fosse un numero intero, ed avremo 538756, indi osserveremo, che il denominatore del decimale dato è 100, cioè l'unità seguita da due zeri, e conchiuderemo, che il denominatore del quadrato sarà l'unità seguita da quattro zeri, ossia 10000, e per conseguenza, che il quadrato di 7, 34 è $\frac{538756}{10000} =$

53, 8756.

Similmente ragionando troveremo, che il cubo del medesimo numero decimale 7, 34 è 395, 446904; e così per le altre potenze.

Similmente operando troveremo, che il quadrato di 0, 3 = $\frac{9}{100} = 0, 09$; e che il

cubo di 0, 3 = $\frac{27}{1000} = 0, 027$; dal che ricaviamo, che qualora il numero delle cifre decimali della potenza del numeratore non sono sufficienti per separare per mezzo della virgola il numero corrispondente ai zeri del denominatore, allora le cifre mancanti si suppliranno con aggiungere de' zeri alla sinistra della potenza trovata del numeratore, ed indi separarne il numero delle cifre decimali, che corrispondono alli zeri, che dovrebbe avere il denominatore.

Decomposizione de' numeri decimali.

A R T I C O L O I.

Della Sottrazione de' numeri decimali.

128. **Q**uando abbiamo trovata la regola delle sottrazione de' numeri interi, noi la abbiamo ricavata dal vedere, che andando dalla destra verso la sinistra, dieci unità di un ordine formano una unità dell'ordine seguente, ma le unità decimali sono sottoposte alla medesima legge, dunque la sottrazione de' numeri decimali si eseguirà secondo la medesima regola, che abbiamo adoperata per gli numeri interi.

Così volendo sottrarre 27, 934 da 96, 26; ossia da 96, 260, noi troveremo come qui a fianco per residuo 68, 326; al 96, 26 noi abbiám aggiunto un zero alla destra della frazione deci- 96, 260 male, per ridurre li due decimali 27, 934 allo stesso denominatore, locchè — non ha alterato il valore del deci- 28, 326 male dato 96, 26.

Divisione de' numeri decimali.

129. *Dividere un numero decimale per un altro.*

Tre casi possono darsi 1. Che le parti frazionarie de' due numeri dati sieno composte del medesimo numero di cifre. 2. Che le parti frazionarie di essi non abbiano il medesimo numero di cifre. 3. Che uno soltanto di essi abbia la parte frazionaria, e l'altro sia un numero intero.

1. Noi sappiamo, che il quoziente di una divisione non si altera, qualora si moltiplichi sì il dividendo, che il divisore per un medesimo numero, quindi il quoziente della divisione proposta resterà lo stesso, se sì il dividendo, che il divisore dati si moltiplicheranno per un numero formato dalla unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre delle parti frazionarie di essi, ma questa operazione si fa supprimendo la virgola, dunque dopo di avere soppressa la virgola sì nel dividendo, che nel divisore, noi faremo la divisione sopra li numeri interi, che ne risultano, ed il quoziente, che avremo sarà il quoziente dimandato.

2. Qualora le parti frazionarie del dividendo e del divisore non hanno il medesimo numero di cifre, allora a quello de'

numeri dati, in cui la parte frazionaria ha il minor numero di cifre, aggiugneremo a destra tanti zeri, quanti ne bisognano, affinchè le parti frazionarie del dividendo e del divisore abbiano il medesimo numero di cifre, locchè non ne altera il valore, indi sopprimendo in essi la virgola, eseguiremo la divisione sopra de' numeri interi, che ne risultano, ed il quoziente, che avremo sarà il quoziente dimandato,

3. Se de' numeri dati uno è un intero, e l'altro un numero decimale, considerando, che il quoziente non si altera qualora moltiplichiamo per lo stesso numero sì il dividendo, che il divisore, noi conchiudiamo, che se moltiplichiamo tanto l'intero, quanto il decimale per la unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, il quoziente non sarà alterato, ma si fatta moltiplicazione si fa aggiugnendo alla destra dello intero dato tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale, e sopprimendo la virgola nel decimale, dunque dopo di avere aggiunto al numero intero tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, e soppressa la virgola nel decimale, noi divideremo gli interi, che ne risultano, ed il quoziente, che avremo sa-

rà il quoziente dimandato. Dal che ricaviamo.

1. Che qualora si debbono dividere due numeri decimali, nelli quali le parti frazionarie hanno lo stesso numero di cifre, si fa astrazione delle virgole, e sopra de' numeri interi che ne risultano si esegue la divisione, la quale darà per quoziente il quoziente dimandato.

2. Qualora si debbono dividere due numeri decimali, nelli quali le parti frazionarie non hanno lo stesso numero di cifre, si debbono aggiugnere tanti zeri a destra di quel numero decimale, in cui la parte frazionaria ha il minore numero di cifre, quante ne abbisognano, affinchè le parti frazionarie de' due numeri dati abbiano lo stesso numero di cifre, indi avendo fatta astrazione delle virgole, si eseguirà la divisione sopra de' numeri interi, che ne risultano, ed il quoziente, che si avrà, sarà il quoziente dimandato.

3. Qualora dobbiamo dividere l'uno per l'altro due numeri, de' quali l'uno sia intero e l'altro decimale, noi aggiungeremo alla destra del numero intero tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, indi facendo astrazione della virgola, divideremo fra loro li due numeri interi, che ne risulta-

no, ed il quoziente, che avremo sarà il quoziente dimandato.

Proponiamoci per esempio di dividere 9, 728 per 2, 7, come in questo caso il dividendo, ed il divisore non hanno le parti frazionarie composte del medesimo numero di cifre, noi aggiugneremo al divisore 2, 7 due zeri alla destra, e fatta astrazione delle virgole, divideremo 9828 per 2700, come qui a fianco. Eseguito la divisione sopra gli interi 9828, e 2700, avremo per quoziente lo intero 3, ed il residuo 1728, or perchè questo residuo non contiene più il divisore 2700, noi metteremo alla sua destra un zero, e supporremo, che esso disegni parti decime della unità, in tale modo esso non avrà cambiato di valore, ed il quoziente sarà in parti decime della unità, quindi, dopo di avere posta la virgola alla destra dello intero 3, per indicare, che la cifra seguente esprime parti decime della unità, divideremo 17280 per 2700, e troveremo per quoziente 6, e per residuo 1080, alla destra del quale aggiugneremo un zero, e facendo ad esso indicare parti centesime della unità, non avrà cambiato di valore; finalmente divideremo 10800 per 2700, e troveremo per quoziente 4, e per residuo

$$\begin{array}{r} 9828 \overline{) 2700} \\ 8100 \overline{) 17280} \\ \underline{10800} \\ 6400 \end{array}$$

zero; e conchiuderemo, che il quoziente di 9, 828 diviso per 2, 7 è 3, 64.

Similmente sia da dividere 0, 007824 per 3, 26, dopo di avere posto alla destra della parte frazionaria del divisore 3, 26 quattro zeri, noi faremo astrazione della virgola, e divideremo lo intero 007824 ossia 7824 per 3260000, e poichè il dividendo non contiene il divisore, il quoziente sarà zero, ed il residuo sarà lo stesso dividendo 7824, al quale aggiugnendo un zero a destra, e facendo ad esso disegnare parti decime della unità, non avrà cambiato di valore, indi lo divideremo per lo divisore

1304000	3260000
3260000	0, 0024
78240	
732400	
7824000	
6520000	
1304000	
13040000	
13040000	
0000000	

do, e che perciò il quoziente deve essere zero, che noi metteremo al posto delle parti decime del quoziente, ed avremo per residuo lo stesso numero 78240 parti decime, alla destra del quale aggiugnendo un zero, e facendo al numero 782400, che ne risulta, designare parti centesima della unità, non avrà cambiato di va-

lore, indi lo divideremo per lo divisore dato, ed avremo per quoziente zero parti centesime, ed il medesimo numero 782400 per residuo, a destra del quale aggiugnere-
mo di nuovo un altro zero, e faremo che esso disegni parti millesime della unità, indi divideremo il numero, che ne risulta 7824000 per lo divisore 3260000, ed il quoziente 2, che è in parti millesime si scriverà alla destra de' due zeri trovati del quoziente, che è il posto assegnato alle parti millesime della unità, indi troveremo il residuo 1304000 alla destra del quale aggiugneremo un zero, ed al numero 13040000, che ne risulta, faremo disegnare parti diecimillesime, e dopo di averlo diviso per lo divisore 3260000, e trovato il quoziente 4, lo noteremo alla destra della cifra 2, che è il posto assegnato alle parti diecimillesime della unità, e troveremo, che il residuo è zero, e conchiuderemo, che il quoziente di 0,007824 per .3, 26 è 0,0024.

Sia in ultimo luogo da dividere 803,52 per 96; noi incominceremo dallo aggiugnere due zeri allo intero 96, e sopprimere la virgola nel decimale, 803,52, indi divideremo l'uno per l'altro li due interi 80352, e 9600, come quì a fianco, e poichè il dividendo contiene il divisore 8 volte avremo il primo quoziente intero 8,

ed il residuo 3552, al qua- $80,52 \overline{) 9600}$
 le aggiungendo un zero alla de- $76800 \overline{) 8,37}$
 stra, e facendo ad esso desi-
 gnare parti decime della unità, 3552
 lo divideremo per 9600, e do- 35520
 po di avere posta una virgola 28300
 a destra del quoziente 8, no-
 teremo alla destra di esso il 6720
 quoziente 3, ed al residuo 6720 67200
 aggiugneremo un zero, alla de- 6,200
 stra; e faremo che esso disegni
 parti centesime della unità, e 00000
 finalmente divideremo 67200
 per 9600, e troveremo per quoziente 7
 e per residuo zero, e conchideremo, che
 il quoziente del decimale 803, 52 diviso
 per lo intero 96 è 8, 37.

ARTICOLO III.

Della estrazione delle radici delli numeri decimali.

130. *E*strarre da un numero decimale
dato la radice di un grado qualunque.

Egli è evidente, che per estrarre le
radici da un numero decimale, bisogna se-
guire lo stesso processo, che si è posto in
uso per la estrazione delle radici dalle fra-
zioni ordinarie, ma noi abbiamo osservato,

che per estrarre una radice da una espressione frazionaria, si deve fare in modo, che il denominatore di essa sia una potenza perfetta del grado della radice dimandata, ma il denominatore di un numero decimale è sempre la unità seguita da uno, o più zeri, e la potenza della unità seguita da uno o più zeri è la unità seguita da tanti zeri, quanti ne sono nelli fattori eguali, che formano la potenza, dunque qualora la unità seguita a destra da uno o da più zeri si eleva alla potenza di un dato grado, si fatta potenza sarà la unità seguita da tanti zeri, quanti ne indica il prodotto, che si ha moltiplicando il numero de' zeri della radice per quello, che indica il grado della potenza dimandata, quindi de' numeri 10, 100, 1000 etc. li quadrati sono 100, 10000, 1000000 etc., li cubi sono 1000, 1000000; 1 000 000 000; etc., e così procedendo avanti per le potenze di gradi superiori; ma nelli numeri decimali li numeri delli zeri de' denominatori sono indicati dal numero delle cifre, che essi hanno a destra della virgola, dunque un numero decimale non può avere il denominatore, che sia un quadrato perfetto, qualora il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice di 2. Similmente il suo denominatore non può essere un cubo perfetto, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multi-

plice di 3, non può essere una quarta potenza perfetta, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice di 4, e così procedendo avanti, in maniera, che in generale il denominatore non può essere una potenza perfetta di un grado dato, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice del numero, che indica il grado della potenza. Quindi per estrarre da un numero decimale dato la radice di un grado dato, si scriveranno alla destra del decimale dato tanti zeri, quanti ne bisognano, affinchè il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola sia un multiplice del numero, che indica il grado della potenza dimandata, indi da esso si estrarrà la radice come se fosse un numero intero, ed alla radice trovata si darà per denominatore la unità seguita da tanti zeri, quanti ne indica il numero, che si ha dividendo il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale dato, per quello, che indica il grado della radice dimandata, ossia separando dalla destra della radice trovata per mezzo della virgola tante cifre, quante ne indica il quoziente, che si ha dividendo il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale dato per lo numero, che indica il grado della radice dimandata.

Così se si dimanda la radice cubica di

36, 4723, noi aggiungeremo alla destra di questo numero due zeri, indi estrarremo da 36, 472300 la radice cubica come se fosse un numero intero, dalla radice prossima 331 trovata separeremo per mezzo della virgola due cifre alla destra; poichè 2 è il quoziente del numero 6 delle cifre della parte frazionaria diviso per lo numero 3, che indica il grado della radice dimandata, e la radice cubica prossima del numero dato sarà 3, 31.

CAPITOLO VII.

Delle trasformazioni delle frazioni ordinarie in frazioni decimali, e reciprocamente delle frazioni decimali in frazioni ordinarie.

ARTICOLO I.

Trasformazione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali.

131. **O**sservando, che le operazioni del calcolo eseguite sopra le frazioni decimali sono sommamente facili, poichè esse si riducono ad operazioni eseguite sopra di esse, come se fossero numeri interi, si è cercato di trovare la maniera di trasfor-

*

mare le frazioni ordinarie in frazioni decimali.

130. Noi abbiamo osservato, che qualunque divisione può essere indicata per mezzo di una frazione, e che qualunque frazione deve essere considerata come indicante il quoziente, che si otterrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, e che perciò la frazione $\frac{3}{4}$, per esempio, equivale al quoziente, che si otterrebbe dividendo 3 per 4, e come chiaramente si vede questo quoziente deve essere minore della unità, ossia che esso deve essere una frazione vera, e poicchè il dividendo 3 è minore del divisore 4, il quoziente deve essere espresso in parti, ciascuna delle quali sia $\frac{1}{4}$ della unità, quindi quando vogliamo trasformare la frazione $\frac{3}{4}$ in frazione decimale, altro non vogliamo fare se non se esprimere in parti 10^{me}, 100^{me}, 1000^{me}, ec. della unità quel quoziente, che la frazione ordinaria $\frac{3}{4}$ esprime in parti quarte della medesima unità; ma per trovare questo quoziente espresso in parti decime; centesime, millesime, etc. della unità, basta trovare sì fatto quoziente 10, 100, 1000, etc. volte maggiore, e di poi dare ad esso per denominatore 10, 100, 1000 etc. Ma noi abbiamo dimostrato, che per avere un quoziente 10, 100, 1000 etc.

volte maggiore, basta rendere il dividendo 10, 100, 1000, etc. volte maggiore senza alterare il divisore, dunque per avere nella divisione di 3 per 4 parti 10, 100, 1000, etc. volte maggiori, dovremo fare sì, che il dividendo 3 divenga 10, 100, 1000, etc. volte maggiore, locchè si eseguirà mettendone uno, due, tre etc. zeri alla destra del dividendo 3, cioè se vogliamo nel quoziente le parti decime, divideremo 30 per 4, se vogliamo le parti 100^{me} divideremo 300 per 4, ed in questo caso avremo il quoziente 75, cento volte maggiore del vero, che noi ridurremo al suo giusto valore, dando ad esso per denominatore 100, ed il vero quoziente sarà 0, 75. Se avessimo voluto ridurre $\frac{3}{4}$ in parti millesime, avremmo diviso 3000 per 4, ed avremmo avuto per quoziente 750, il quale essendo 1000 volte maggiore del quoziente dimandato, sarà ridotto al suo giusto valore dando ad esso per denominatore 1000, e la frazione data $\frac{3}{4}$ sarebbe ridotta alla frazione decimale 0, 750. Dal che vediamo, che qualora abbiamo aggiunto un zero alla destra del dividendo, abbiamo avuta una cifra decimale al quoziente, e che qualora abbiamo aggiunti due zeri, abbiamo avuto al quoziente due cifre decimali; similmente avremmo potuto osservare, che aggiugnendo al dividendo un certo numero di zeri avremmo ottenuto al

quoziente uno eguale numero di cifre decimali. Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora vogliamo ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, noi *scriviamo alla destra del numeratore tanti zeri, quanto è il numero delle cifre decimali, che da noi si vogliono nel decimale dimandato, indi divideremo il numeratore così alterato per lo denominatore della frazione data, e separeremo dal quoziente, procedendo dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono stati li zeri aggiunti al numeratore, potendo scrivere alla destra del numeratore qualunque numero di zeri, purchè dal quoziente si separino per mezzo di una virgola tante cifre a destra, quanto è stato il numero de zeri posti a destra del numeratore della frazione data.*

Così se ci proponiamo di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{12}$, noi incominceremo dall'osservare, che 5
la frazione data è 50000 etc.
una frazione vera, 20
e che perciò divi- 80
dendo il numerato- 80
re 5 per lo deno-
minatore 12 avremo per quoziente zero, e
per residuo lo stesso 5, a destra del quale

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 50000 \text{ etc.}} \\ \underline{0, 4166 \text{ etc.}} \end{array}$$

concepiremo scritto un numero qualunque di zeri, indi dopo avere posta una virgola a destra del quoziente 0, noi divideremo 50 decime per 12, ed avremo il quoziente parziale 4 decime, che noteremo a destra della virgola, nel quoziente, ed il residuo 2 a destra del quale discendiamo un zero, e divideremo il dividendo parziale 20 centesime per 12, noteremo al quoziente a destra della cifra 4 il quoziente parziale 1, che indicherà parti centesime, ed avremo il residuo 8, a destra del quale discenderemo un altro zero, ed avremo il dividendo parziale 80 millesimi, che diviso per 12 darà il quoziente parziale 6 millesimi, che noteremo a destra delle cifre trovate del quoziente, ed avremo il residuo 8 a destra del quale calando un zero avremo lo stesso dividendo parziale 80, lo stesso quoziente parziale 6, e lo stesso residuo 8, in modo che la divisione può essere continuata all'infinito, e perciò volendo avere il valore esatto di $\frac{5}{12}$, espresso in decimali, bisognerebbe incominciare dallo scrivere al quoziente 0, 416, e dipoi alla destra di queste tre cifre scrivere infinite volte la cifra 6; locchè fa vedere, che il valore di $\frac{5}{12}$ non può essere esattamente espresso da una frazione decimale.

133. Qui però avvertiremo, che se noi ci arrestiamo alla prima cifra del quoziente,

lo errore da noi commesso è minore di $\frac{2}{10}$, se ci arrestiamo alla seconda, lo errore è minore di $\frac{1}{100}$, se alla terza lo errore è minore di $\frac{1}{1000}$ etc., in maniera, che lo errore diviene tanto minore, quanto maggiore è il numero delle cifre, che troviamo al quoziente, tuttavia se noi volessimo contentarci di esprimere approssimativamente con un piccolo numero di cifre decimali, il valore della frazione ordinaria $\frac{5}{12}$, volendo servirci di due cifre decimali soltanto, bisognerebbe scrivere piuttosto 0, 42, che 0, 41, poichè 0, 41 è minore di 0, 416 di $\frac{6}{1000}$, nel mentre che 0, 42 è maggiore di 0, 416 di $\frac{4}{1000}$, ed ordinariamente è meglio commettere lo errore di $\frac{4}{1000}$ in eccesso, che quello di $\frac{6}{1000}$ in difetto; similmente se vogliamo fare uso di tre cifre decimali, è meglio scrivere 0, 417, che 0, 416; e così procedendo innanzi.

Ma se riducendo una altra frazione ordinaria in frazione decimale, essa fosse espressa da 0, 3712, e si volesse da essa togliere una cifra, ed esprimere il suo valore approssimativo con tre cifre soltanto, noi scriveremo piuttosto 0, 371, che 0, 372, poichè 0, 371 manca dal suo valore di $\frac{2}{10000}$, nel mentre che 0, 372 eccede il valore di 0, 3712 di $\frac{8}{10000}$, ed ordinariamente è meglio commettere lo errore di $\frac{8}{10000}$ in difetto, che quello di $\frac{2}{10000}$ in eccesso.

Finalmente se si volesse esprimere per approssimazione con sole tre cifre la frazione decimale $0,7485$, noi potremo scrivere indifferentemente in sua vece tanto $0,748$, quanto $0,749$, poichè nel primo caso faremo un errore di $\frac{5}{10000}$ in difetto, e nel secondo quello di $\frac{5}{10000}$ in eccesso; Però quando non si trascura una sola cifra, ma più cifre, come sarebbe quando ci proponiamo di esprimere con sole tre cifre il valore approssimativo della decimale $0,513597$, se noi scriviamo $0,513$ trascuriamo le tre cifre, delle quali le due, che seguono il 5 aumentano il suo valore, e faremo un errore minore aumentando la cifra 3 di una unità, e scriveremo $0,514$ piuttosto, che $0,513$. Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, si renda il numeratore della frazione proposta 10, 100, 1000 etc. volte maggiore, indi il numeratore in tale maniera alterato si divida per lo denominatore della medesima frazione, e si consideri il quoziente come esprimente parti 10^{me} , 100^{me} , 1000^{me} , etc. della unità, secondo il numero de' zeri, che si sono scritti alla destra del numeratore; Se nella decimale, che ne risulta si sopprimono delle cifre, e la prima cifra a sinistra, di quelle, che si sopprimono è maggiore di 5,

si accresca di una unità la ultima cifra della frazione ridotta, ma se la prima cifra a sinistra delle cifre, che si sopprimono è minore di 5, non si altera la cifra ultima della frazione ridotta; se si sopprimono più cifre, e la prima di esse a sinistra è 5 si accresca ancora di una unità la ultima cifra non soppressa, se poi si sopprime la sola ultima cifra, ed essa è 5 è indifferente, lo accrescere di una unità la ultima cifra non soppressa, oppure lasciarla tale quale essa si trova.

Proponiamoci di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{7}$, noi immagineremo, che alla destra del numeratore 5 sia scritto un numero qualunque di zeri, indi faremo il calcolo secondo quello, che abbiamo detto come qui a fianco, noi osserveremo, che li sei primi dividendi par-

Divid.	5	Div.	7
sono	50		
50,	10	Quoz.	0,714285714285
10,	30		
30,	20		
20,	60		
60,	40		
40,	50		
50,li			

quali danno per quozienti parziali successivamente le cifre 6, 1, 4, 2, 8, 5, dopo delle quali li medesimi quozienti parziali

debbono ritornare nel medesimo ordine, giacchè il primo de' dividendi parziali 50 ritorna, e perciò deve avere appresso di se li seguenti, e questi sei dividendi ritornando sempre, e nel medesimo ordine, faranno similmente rivenire nel medesimo ordine li medesimi quozienti, ed avremo la frazione ordinaria $\frac{5}{7} = 0,714285714285714285$ etc. Dal che si vede, che vi sono alcune frazioni ordinarie, che non possono essere ridotte esattamente in frazioni decimali, e che qualora una frazione ordinaria non può essere ridotta esattamente in frazione decimale, produce una divisione, che non può terminare, e per conseguenza produce una frazione decimale *infinita*.

Dippiù è evidente, che qualora riduciamo una frazione ordinaria in frazione decimale, li residui delle divisioni parziali non possono mai essere eguali al divisore, nè maggiori di esso, in modo tale, che la divisione, che si fa per eseguire questa operazione, non può fornire tutto al più un numero di residui differenti eguale al numero delle unità del divisore diminuito di una unità, di maniera, che volendo ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{7}$, prima di eseguire la divisione siamo sicuri di non potere avere per residui se non se 1, 2, 3, 4, 5, 6 tutto al più, e questi situati in qualunque ordine, e sappiamo

dippiù, che qualora questi residui si saranno avuti, il residuo seguente o sarà zero, e la divisione sarà terminata, oppure uno de' residui precedenti ritornerà, ed allora la frazione decimale diventerà infinita, e poichè in essa una, o più cifre saranno ripetute nel medesimo ordine in modo, che formeranno un *periodo*, la frazione, che ne risulta prende il nome di *frazione decimale periodica*

134. Quando abbiamo ridotta la frazione $\frac{5}{7}$ in frazione decimale; abbiamo osservato 1. Che il residuo, che è ritornato il primo è stato il medesimo, che il primo dividendo parziale. 2. Che il periodo ha incominciato dalla prima cifra del quoziente. 3. Che il periodo è stato composto da sei cifre. Ma qualche volta il residuo, che ritorna è il secondo, il terzo il quarto etc. de' residui precedenti, ed allora corrispondentemente il periodo incomincia dalla seconda, terza, quarta etc. cifra del quoziente, e può essere composto di una, due, tre etc. cifre, ed in tale caso la frazione decimale infinita prende il nome di *frazione decimale periodica mista*.

Così nella frazione $\frac{7}{15} = 0,4666$. etc. il periodo incomincia alla seconda cifra, ed è di una cifra. Nella frazione $\frac{7}{12} = 0,581818$ etc., il periodo incomincia alla seconda cifra, ed è di due cifre; Nella frazione

$\frac{7}{4} = 0,54944$ il periodo incomincia dopo la terza cifra, ed è di una cifra.

135. Bisogna qui avvertire, che qualora una frazione ordinaria è suscettibile di essere ridotta esattamente in frazione decimale, non si può mai avere il medesimo residuo nella divisione, ossia il medesimo dividendo parziale, poicchè in tale caso dovremmo avere una frazione decimale composta da infinite cifre, e non una frazione finita, tuttavia spesso volte accade, che li residui sieno tra loro poco differenti, ed allora essi forniscono al quoziente la medesima cifra, in modo che nel quoziente si trova, che una o più cifre sono nel medesimo ordine ripetute; in questo caso esse non debbono essere considerate come formanti un periodo. Così, per esempio, la frazione $\frac{5}{20} = 0,255$ è una frazione finita, e sebbene la cifra 5 sia in essa ripetuta due volte consecutivamente, pure questa ripetizione non produce un periodo.

ARTICOLO II.

*Trasformazione delle frazioni decimali
in frazioni ordinarie.*

136. **D**opo di avere trovata la maniera di ridurre le frazioni ordinarie in frazioni decimali, bisogna cercare il metodo, per mezzo del quale una frazione decimale può essere trasformata in frazione ordinaria.

137. Egli è evidente, che una frazione decimale finita sarà ridotta alla forma di frazione ordinaria, qualora sotto di essa scriviamo il denominatore, che noi abbiamo sottointeso, quando la decimale è scritta secondo la sua forma; ma come spesso volte questa maniera di trasformarle produce una frazione capace di essere ridotta ad espressione più semplice; dopo di averla così ridotta, noi la ridurremo alla sua minore espressione, dividendo li suoi termini per lo massimo divisore comune di essi.

Così se abbiamo le frazioni decimali $0,3$; $0,73$; $0,411$; $0,031$, noi le avremo ridotte in frazioni decimali facendo $0,3 = \frac{3}{10}$; $0,73 = \frac{73}{100}$; $0,411 = \frac{411}{1000}$; $0,031 = \frac{31}{1000}$; e poicchè li termini di tali frazioni ordinarie sono numeri primi, esse non possono essere riddotte ad una forma più semplice.

Se poi vogliamo ridurre sotto la for-

ma ordinaria la frazione decimale $0,46$, noi osserveremo, che dopo di avere scritto $0,46$ sotto la forma $\frac{46}{100}$, essa si può ridurre a più semplice espressione, giacchè li suoi termini hanno il comune divisore 2, e diremo la decimale $0,46 = \frac{46}{100} = \frac{23}{50}$. Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre una frazione decimale finita in frazione ordinaria, dopo di averla scritta alla maniera delle frazioni ordinarie, si dividano li suoi termini per lo massimo divisore di essi, ed il risultato sarà la frazione ordinaria equivalente alla frazione decimale proposta ridotta alla più semplice espressione.

138. Resta ora da cercare il metodo da ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale periodica sia essa periodica semplice, sia periodica mista.

Ed in primo luogo noi osserveremo, che le frazioni periodiche altre non sono se non se frazioni ordinarie ridotte sotto la forma decimale, e che non possono essere esattamente espresse sotto questa forma, e che per conseguenza esse sono suscettibili di ritornare sotto la forma ordinaria, che è la loro vera forma.

Supponiamo, che si voglia ridurre in frazione ordinaria la frazione periodica $0,7\overline{77}$ etc. Se noi moltiplichiamo questa frazione

192

per 10, oppure ciò che vale stesso, noi avanziamo la virgola di un passo verso la destra, avremo il numero decimale 7, 777 etc. il quale sarà decuplo della frazione periodica data 0, 7777 etc.. Quindi se da 7, 777 etc. sottrajamo la frazione periodica data 0, 7777 etc. avremo per residuo il numero intero 7, il quale sarà 9 volte maggiore della frazione data, per conseguenza se dividiamo sì fatto numero 7 per 9 avremo $\frac{7}{9}$, che sarà eguale alla frazione periodica data 0, 7777 etc.

Supponiamo, che la frazione abbia il periodo di due cifre, come sarebbe 0, 76 76 76 etc., ed avanziamo la virgola di due posti verso la destra, avremo il numero decimale 66, 76 77 76 etc., il quale è centuplo della frazione periodica proposta 0, 76 76 76, quindi se dal numero decimale 66, 76 76 76 etc. togliamo la frazione 0, 76 76 76 etc. avremo per residuo il numero intero 76, il quale è 99 volte maggiore della frazione data 0, 76 76 76 etc., dunque se dividiamo 76 per 99 avremo $\frac{76}{99}$ eguale alla frazione periodica 0, 76 76 76 etc.

Se nella frazione data il periodo fosse di tre cifre, applicando ad essa il raziocinio precedente, noi avremmo trovato, che essa equivale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore un periodo, e per denominatore un numero fatto da tre volte la ci-

fra 9 cioè da 999; e così procedendo avanti, quallora la frazione periodica ha il periodo composto da qualsivoglia numero di cifre; Lo che ci fa vedere, che qualora la frazione periodica ha il suo periodo di una cifra, essa equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 9; quando essa ha il periodo di due cifre essa equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 99, se essa ha il periodo di tre cifre, equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 999; ed in generale, che qualora la frazione periodica ha il suo periodo di qualsivoglia numero di cifre essa sempre equivale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore il periodo, e per denominatore un numero composto dalla cifra 9 scritta tante volte, quante ne indica il numero delle cifre del periodo; dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre in frazione ordinaria una frazione periodica semplice, *bisogna dividere il suo periodo per un numero formato dalla cifra 9 scritta di seguito tante volte quante ne indica il numero delle cifre del periodo.*

139. Proponiamoci ora la ricerca del metodo, che dee tenersi per ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale nella

94
 quise si trovano una, o più cifre prima del periodo, e che abbiamo chiamata *frazione periodica mista*.

Sia la frazione periodica mista
 $0,72974\ 974\ 974\ \text{etc.}$ e mettiamo la virgola alla destra del primo periodo, avremo
 $72974,974\ \text{etc.} = 100000 \times 0,72974\ 974\ \text{etc.}$ Similmente passiamo la virgola alla sinistra dello stesso primo periodo della proposta, avremo $72,974\ 974\ 974\ \text{etc.}$
 $= 100 \times 0,72\ 974\ 974\ 974\ \text{etc.}$ Quindi sottraendo la seconda eguaglianza dalla prima, avremo
 $72\ 974 - 72 = 99900 \times 0,72\ 974\ 974\ 974\ \text{etc.}$; e dividendo queste due quantità eguali per 99900, avremo $\frac{72974-72}{99900} = 0,72\ 974\ 974\ 974\ \text{etc.}$ Quindi la frazione periodica mista proposta $0,72\ 974\ 974\ 974\ \text{etc.}$ è eguale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore $72974 - 72$, cioè la differenza de' due numeri interi, de' quali uno è formato dalle cifre della frazione proposta, che sono dalla prima di esse fino all'ultima inclusivamente del primo periodo; e l'altro è la parte non periodica, e per denominatore un numero composto dalla cifra 9 scritta di seguito tante volte, quante ne indica il numero delle cifre di un periodo seguito da tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre non periodiche della frazione decimale periodica mista proposta; e poichè lo stesso raziocinio è applicabile a qualunque altra

frazione periodica mista, noi ricaveremo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale periodica mista, si prenda il numero formato dalle cifre, che sono comprese tra la prima di essa, e l'ultima inclusivamente del primo periodo, e da esso si sottragga il numero formato dalle cifre non periodiche, indi si faccia una frazione, la quale abbia per numeratore il residuo di tale sottrazione, ed abbia per denominatore il numero composto dalla cifra 9 scritta di seguito tante volte, quante ne indica il numero delle cifre di un periodo, alla destra del quale sieno scritti tanti zeri, quante sono le cifre non periodiche della frazione decimale periodica mista proposta.

*Origine delle quantità incommensurabili,
ed uso de' decimali per determi-
nare il valore approssimativo
di esse.*

140. **Q**uando da noi si sono espote le regole per eseguire le operazioni del calcolo sopra de' numeri interi, abbiamo esposto il metodo per estrarre le radici quadrate, e cubiche da un numero dato, ed abbiamo osservato, che quando il numero dato è un quadrato, o un cubo perfetto, noi abbiamo di esso la radice quadrata, o cubica esattamente; e che se il numero dato non è la potenza esatta del grado della radice dimandata, la radice da noi trovata è soltanto approssimativa, e da noi si commette un errore minore di una unità. Similmente abbiamo osservato, che qualora si deve estrarre una radice di un dato grado da una frazione ordinaria, li due termini della quale sieno potenze perfette del grado della radice dimandata, estraendo sì dal numeratore, che dal denominatore di essa la radice del grado dimandato, operando sopra di ciascuno di essi secondo il metodo adoperato per gli numeri interi, la frazione la quale ha per suoi termini le rispettive radici delli due termini della frazione data, è la radice esatta della

frazione proposta; e finalmente, abbiamo osservato, che se li due termini della frazione proposta non sono potenze perfette del grado della radice dimandata, allora dopo di aver fatto divenire il denominatore di essa potenza perfetta del grado della radice cercata, senza alterare il valore della frazione, facendo la frazione, che ha per numeratore la radice prossima del numeratore della frazione trasformata, e per denominatore il denominatore della proposta, abbiamo la radice prossima della frazione data, la quale differisce dalla radice esatta della proposta quantità, minore di una unità frazionaria, la quale è denominata dal denominatore della frazione proposta. Dal che vediamo, che il problema della estrazione dell' radici spesso ci conduce ad avere delle quantità, le quali sono approssimativamente quelle, che da noi si cercano, e questo sempre deriva dal non potere trovare la radice di un dato grado di un numero intero, e dal trovare la radice dell' intero dato, la quale è minore della radice esatta, e tale, che se essa si accresce di una unità diviene maggiore della radice dimandata, dal che siamo autorizzati a conchiudere, che essa deve essere formata dalla radice prossima trovata in numero intero aggiunta ad una frazione vera; e qui si può proporre la quistione; *Qualora da un numero intero non si può estrar-*

re esattamente una radice in numeri interi, potremo noi ottenerla esattamente per mezzo delle frazioni ordinarie, o per mezzo delle frazioni decimali?

Per rispondere alla quistione proposta noi dimostreremo il seguente teorema.

141. Qualora si moltiplicano fra loro due numeri primi, il loro prodotto non può essere divisibile esattamente per alcun altro numero primo diverso dalli due fattori.

Rappresentino p , q due numeri primi, e sia d un numero primo esatto divisore del prodotto $p \times q$. Dico che d è eguale a p oppure a q , in modo, che se esso non è p , è necessariamente q .

Per ipotesi d è esatto divisore di $p \times q$, dunque $\frac{p \times q}{d}$ è uguale ad un numero intero,

che noi chiameremo q ; e perciò sarà $\frac{p \times q}{p} = q$; dividendo queste quantità eguali per p , sarà $\frac{p}{d} = \frac{q}{p}$; ma noi abbiamo sup-

posto, che p , d sono due numero primi diseguali, dunque $\frac{p}{d}$ è una espressione frazionaria ridotta alla sua minima espressione, e

perciò li due termini della espressione frazionaria $\frac{q}{p}$ o sono eguali alli termini di $\frac{p}{d}$,

• sono egualmente moltiplici di essi, ma per ipotesi p' è un numero primo, e perciò non può essere moltiplice di d , sarà eguale a d , e perciò se d è divisore di $p \times p'$, e non è eguale a p , deve essere eguale a p' .

142. Da questa verità noi ricaviamo, che se si ha un prodotto nato dalla moltiplicazione continua di una serie di numeri primi, esso non può avere per divisore esatto alcun numero primo differente da quelli, dalla moltiplicazione de' quali esso è formato. In fatti supponiamo che si moltiplichino fra loro li numeri primi p, p', p'' , e sia il divisore del prodotto, di essi designato da d , io mi propongo di dimostrare, che d è eguale ad uno de' tre numeri p, p', p'' , in modo, che se esso non è p , o p' , deve necessariamente essere p'' .

Sia $\frac{p \times p' \times p''}{d} = q$, dividendo queste

quantità eguali per p'' , noi avremo $\frac{p \times p'}{d} = q$, ma

per ipotesi p, p', d sono numeri primi, e per supposizione d non è p , nè p' , dunque la espressione frazionaria $\frac{p \times p'}{d}$ è ridotta a mi-

nimi termini, e perciò p' o deve essere eguale a d , o moltiplice di d , ma per ipotesi p' è numero primo, e per conseguenza non è moltiplice di d , dunque $p' = d$. Con

lo stesso raziocinio si può dimostrare la medesima verità, qualunque sia il numero de' fattori primi, che fra loro si moltiplichino.

143. Dal che ricaviamo le seguenti interessantissime verità. 1. *Se vi sono due serie di numeri primi, le quali non abbiano alcun termine comune, il prodotto de' termini della prima serie è numero primo col prodotto de' termini della seconda serie.* Imperocchè ciascuno di sì fatti prodotti non può avere per suo divisore primo un numero primo, il quale non sia uno de' suoi fattori, nè per divisore composto un numero, il quale non sia il prodotto de' medesimi suoi fattori primi.

2. *Se un numero intero non ha la sua radice di qualunque grado esatta in numero intero, non può averla esattamente in numero frazionario.* In fatti supponiamo, che la radice di un numero intero, la quale non può averli esattamente in un numero intero, si abbia in un intero unito ad una frazione. Si concepisca questo intero unito alla frazione ridotto ad espressione frazionaria, e tale espressione frazionaria sia ridotta alla sua minima espressione.

Le potenze del medesimo grado di questa espressione frazionaria sono li prodotti di due serie di numeri primi, che hanno il medesimo numero di fattori primi tutti dissimili, dunque la frazione, che risulta dal-

le potenze delli termini della espressione frazionaria ha li suoi termini, che sono numeri primi fra loro, e per conseguenza il numeratore non può contenere il denominatore un numero intero di volte, e perciò la potenza della espressione frazionaria proposta, non può essere un numero intero. Dal che conchiudiamo, che se un numero intero non ha per sua radice esatta un numero intero, non può averla esattamente in numero frazionario.

3. Da quanto abbiamo detto si vede evidentemente, che la operazione della estrazione delle radici dà origine ad una nuova specie di quantità, che noi chiameremo irrazionali, o *incommensurabili*; chiamando così le quantità, che noi concepiamo essere le radici delli numeri interi, le quali non sono numeri interi; e poichè la estrazione delle radici delle frazioni si riduce alla estrazione delle radici de' numeri interi, allora quando esse sono state ridotte ad avere per denominatore una potenza esatta del grado dimandato, questa denominazione si estende ancora alli numeri frazionarj.

Noi ci serviremo del segno $\sqrt{}$ per designare sì fatte quantità, e qualora dentro di questo segno si mettono li numeri 2, 3, 4 etc., esso disegnerà, che la radice dimandata è del secondo, del terzo, del quarto ec. grado, così $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$ etc.

disegno rispettivamente la radice seconda, terza, o quarta del numero 3, che è sottoposto al segno radicale, ed a queste quantità si è dato il nome, *di quantità irrazionali*, o *incommensurabili*, poichè il rapporto di esse alla unità non può essere esattamente espresso in numeri, e perchè esse non hanno alcuna misura comune con la unità.

145. Per quello, che abbiamo esposto si vede chiaro, che da un numero intero il quale non è potenza perfetta del grado di una radice dimandata, non si può estrarre la radice esatta; tutta via noi possiamo avere la radice dimandata, con quel grado di approssimazione, che da noi si vuole, convertendo il numero dato in una frazione, il denominatore della quale sia la potenza del grado della radice dimandata di quel numero, che deve denominare le unità frazionarie della approssimazione dimandata; per esempio, se si vuole la radice quadrata di 2, approssimandola in modo, che essa differisca dalla sua vera radice di una quantità minore di $\frac{1}{9}$, allora noi ridurremo il numero 2 in una espressione frazionaria, il denominatore della quale sia il quadrato di 9, tale frazione sarà $\frac{162}{81}$, dalla quale estraendo la radice quadrata secondo le regole date, avremo $\sqrt{\frac{162}{81}} = \frac{12}{9} = 1 \frac{2}{9}$, quantità, che differisce dalla radice esatta di 2 per una quan-

tità minore di $\frac{1}{9}$. Similmente se da noi si vuole la radice cubica di 2, in modo che essa differisca dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{9}$, noi ridurremo il numero 2 in una espressione frazionaria equivalente, la quale abbia per denominatore 125 cubo di 5; ed allora, estraendo la radice cubica dalla espressione frazionaria $\frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{125}$, avremo

$\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{125}} = \frac{5}{5} = 1 \frac{2}{5}$, quantità che differisce dalla vera radice cubica di 2 per una quantità minore di $\frac{1}{5}$. Similmente si può operare per avere la radice di qualunque grado di un numero dato, da cui essa non si può estrarre esattamente, e dando ad essa qualunque grado di approssimazione.

145. Quantunque il metodo dato possa condurci alla determinazione della radice di qualsivoglia grado delle quantità, che non hanno tale radice esatta, dando ad essa quel grado di approssimazione, che a noi piacerà, pure l'applicazione delli decimali a tale ricerca ci somministra un metodo sommamente comodo, quindi noi cercheremo di esporlo applicandolo alla ricerca delle radici quadrate, e cubiche incommensurabili.

146. Per la teoria da noi esposta delle frazioni decimali sappiamo, che qualora un decimale è espresso in centesime, la sua radice quadrata è in decime, che quando essa è espressa in millesime la sua radice qua-

drata è in centesime etc.. Quindi se noi ci proponiamo di estrarre la radice quadrata di un numero dato, approssimativamente fino alle parti decime, noi ridurremo tale numero in espressione frazionaria decimale espressa in centesime: se vogliamo avere la approssimazione fino alle centesime ridurremo il numero in parti diecimillesime, loche faremo scrivendo alla destra di esso rispettivamente due, quattro, etc. zeri; indi ne estrarremo la radice, come se fosse un numero intero, e da essa separeremo con una virgola, andando dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quante ne indica la metà del numero de' zeri aggiunti alla destra dello intero dato.

Così se vogliamo la radice quadrata di 12 con una approssimazione fino alle parti centesime, noi noteremo quattro zeri alla destra del numero 12, ed estrarremo secondo la regola data dal numero intero 120000 la radice quadrata come se fosse un numero intero, e troveremo che essa è 346 con uno errore minore di una unità. Ma noi dobbiamo separare dalla sua destra due cifre decimali, per avere la radice prossima di 12, dunque la radice prossima di 12 è 3,46, ed essa differisce dalla radice esatta di una quantità minore di una unità decimale del secondo ordine, ossia di $\frac{1}{100}$. Se avessimo voluta la approssimazione fino alle unità del

terzo ordine decimale, ossia fino alle millesime avremmo posto sei zeri alla destra del 12; e così procedendo avanti.

Dippiù noi sappiamo, che li cubi de' numeri 10, 100, 1000 ecc., sono rispettivamente 1000, 1000000, 1000000000, ecc., quindi se noi dobbiamo estrarre per approssimazione la radice cubica da un numero dato, che non è cubo perfetto, dobbiamo ridurlo in espressione frazionaria decimale, la quale abbia per denominatore 1000, 1000000, 1000000000, ecc. secondochè la approssimazione si vuole portata fino alle parti decime, centesime, millesime, ecc. della unità; e perciò dobbiamo scrivere alla destra dello intero dato, tre, sei, nove etc. zeri, indi estrarne la radice cubica come se fosse un numero intero, e separare dalla radice trovata, per mezzo di una virgola andando dalla destra verso la sinistra, una, due, tre, ecc. cifre decimali.

Così se vogliamo la radice cubica di 12, e vogliamo portare la approssimazione fino alle parti centesime, noi scriveremo sei zeri alla destra del numero dato 12; ed allora estrarremo la radice del numero 12000000 secondo la regola data per gli numeri interi, ed avremo $\sqrt[3]{12000000} = 228$, con un'errore minore di una unità. Ma avendo noi alla destra del numero dato 12, scritti sei zeri, dobbiamo separare con la virgola due

cifre decimali, quindi la radice cubica di 12 sarà 2,28 con un errore minore di $\frac{1}{100}$; Se avessimo voluto portare la approssimazione fino alle millesime, noi avremmo scritti nove zeri alla destra del 12, e così procedendo avanti.

Se il numero dato fosse stato un intero unito con un decimale, applicando il metodo dato per approssimare la radice di un numero intero al numero decimale dato, troveremo la radice dimandata con quella approssimazione che si vorrebbe; facendo però sempre, che trattandosi della radice quadrata, il numero delle cifre della parte decimale sia sempre un multiplice di 2, e che trattandosi della radice cubica, il numero delle cifre della parte decimale sia sempre un multiplice di 3; e qualora il numero dato non riempiesse queste condizioni, esso si completerà aggiugnendo alla sua destra quel numero di zeri, che sarà necessario.

Finalmente se si vuole la radice di una frazione ordinaria con una approssimazione determinata, si ridurrà la frazione data in frazione decimale esatta, se può essere esatta, o approssimata, se essa non è esattamente riducibile in frazione decimale; facendo però attenzione, di condurre la approssimazione della decimale a quel numero di cifre, che è il doppio di quello indicato dal-

l'ordine delle decimali, che denota la approssimazione, se si tratta della radice quadrata, e trattandosi della radice cubica condurla fino a tanto, che la decimale contenga il triplo del numero delle cifre indicato dall'ordine delle decimali, che deve avere la approssimazione dimandata.

CAPITOLO IX.

*Teoria de' numeri denominati,
o complessi.*

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

Fino ad ora noi abbiamo considerati li numeri in una maniera astratta, poichè ci siamo proposto soltanto di conoscere le proprietà di essi, e le regole per comporli, e decomporli, ma quando la società ha dovuto applicarli ai bisogni di essa, abbiamo dovuto fissare la natura delle unità, ed i numeri sono divenuti *concreti*.

Così in Napoli la unità di lunghezza si è chiamata *canna*; la unità di peso *Rotolo*, la unità di moneta *Docato*, la unità di capacità *Tomolo*, etc. E poichè bisognavano in ciascuna specie delle unità minori, si stabilirono delle unità frazionarie delle

prime, ma in vece di esprimerle, e scriverle nella forma frazionaria facendo uso de' denominatori, si credette più comodo, o almeno più adattato alla capacità del popolo dare ad esse de' nomi particolari, in vece di fare uso de' denominatori; Così fu chiamata *Palmo* la ottava parte di una canna. *Oncia* la dodicesima parte di un palmo, e *Minuto* la quinta parte della oncia. Si chiamò *Carlino* la decima parte del docato, *Grano* la decima parte del carlino, *Cavallo* la dodicesima parte del grano, e similmente per le unità rapportate ad altre specie di grandezze; dal che sono nati li numeri, che volgarmente chiamiamo *numeri denominati*, o *complessi*, poichè essi contengono unità di diverso nome, ma tutte dipendenti dalla unità principale, della quale esse sono frazioni.

Egli è evidente, che avendo data questa nuova forma alli numeri, le operazioni del calcolo, che debbono ad essi essere applicate, debbono ricevere qualche modificazione, quindi esporremo le regole, che debbono sopra di essi essere eseguite, ma questo suppone, che si sappiano le leggi della denominazione delle differenti unità concrete, che sono in uso nel paese, in cui esse debbono essere praticate.

Prima però di esporre la teoria de' numeri complessi concreti, stimo non essere

fuori di proposito premetterò alcune riflessioni generali sul calcolo de' numeri concreti.

149. In primo luogo osserveremo, che tutte le operazioni, che nella Aritmetica si eseguono sopra de' numeri concreti, dipendono dal calcolo de' numeri astratti; in fatti, quando noi riflettiamo, che il risultato, al quale deve condurre la soluzione di un problema, dipende da due sole cose, cioè dalla natura delle sue unità, e dal numero di esse, il quale è sempre astratto, delle due cose la prima, cioè la natura delle unità, è determinata dallo stato della questione, la seconda, cioè il numero di tali unità, evidentemente deve essere determinato per la operazione eseguita sopra de' numeri astratti; Così quando cerchiamo di determinare la somma de' due numeri concreti 8 palmi, e 3 palmi, lo stato della questione ci fa vedere, che il risultato deve essere in unità di palmi, le quali saranno al numero di 11, che è la somma de' numeri astratti 8, e 3. Similmente se ci proponiamo di sottrarre 3 palmi da 8 palmi, il risultato deve essere in palmi, ed il numero di essi è quello che risulta della differenza de' numeri astratti 8, e 3. La moltiplicazione del numero concreto 6 canne per lo numero astratto 3, non presenta alcuna difficoltà, giacchè essa si riduce a fa-

re la somma di 3 numeri eguali a 6 canne, la quistione ci fa sapere, che il risultato deve essere in canne, nel mentre che la operazione altro non dee fare, se non se determinare il numero di esse, il quale è evidentemente 18. In fine il prodotto di 6 canne per 3 essendo 18 canne; ne ricaviamo, che dividendo fra loro li due numeri concreti della medesima natura, cioè 18 canne per 6 canne, troviamo il quoziente astratto 3, nel mentre, che il quoziente del numero concreto 18 canne per lo numero astratto 3, dà il numero concreto 6 canne.

150. Dal che ricaviamo le seguenti verità generali 1. *La natura della addizione, e della sottrazione, ci fa evidentemente conoscere, che è impossibile addizionare fra loro, o sottrarre, l'uno dall'altro due numeri di differente specie.* 2. *In una moltiplicazione, come abbiamo dimostrato, il moltiplicatore è sempre un numero astratto, e per conseguenza il prodotto di due numeri concreti non può esistere, principio di massima importanza.* 3. *Poichè in qualunque divisione il dividendo è il prodotto del quoziente per lo divisore, è impossibile dividere un numero astratto per un numero concreto, imperocchè in questo caso il dividendo non potrebbe avere per suoi fattori il quoziente, ed il divisore; per e-*

sempio se il numero astratto 18 potesse dividersi per 6 canne, sarebbe necessario, che il numero astratto 18 fosse eguale al prodotto concreto, che si ha moltiplicando il divisore concreto 6 canne per lo quoziente 3, locchè è assurdo. 4. Come ancora si vede, chiaramente, che *un numero concreto di una natura non può essere diviso per un altro numero concreto di natura differente*, come per esempio, non si può dividere 15 canne per 6 rotoli, poicchè in tale caso il dividendo 18 canne dovrebbe eguagliare il prodotto di 6 rotoli moltiplicato per lo quoziente 3, ed avremmo 18 rotoli eguali a 18 canne, locchè è assurdo.

151. Le cose fino ad ora dimostrate, ci fanno generalmente conchiudere, che qualora noi ci proponiamo di fare le operazioni di calcolo sopra de' numeri, *noi dobbiamo incominciare dallo esaminare, se essi hanno le condizioni necessarie per potere sopra di essi applicare la regola della operazione, quando ciò è stato verificato, noi opereremo sopra de' numeri, facendo astrazione dalle specie, delle unità, ed il risultato della operazione indicherà di quante unità astratte è composto il numero dimandato, nel mentre, che la natura delle unità è determinata dallo stato della quistione proposta.*

152. Quindi nella addizione, e nella sottra-

zione de' numeri concreti incomplessi, essi debbono essere composti da unità della medesima grandezza, e la natura delle unità del risultato è sempre quella delle unità de' numeri, sopra delli quali si è operato. Nella moltiplicazione il moltiplicatore è essenzialmente astratto, e le unità del prodotto sono della medesima grandezza di quelle del moltiplicando. Nella divisione, quando il dividendo, ed il divisore sono composti dalle medesime unità concrete, il quoziente è un numero astratto, il quale indica quante volte il dividendo contiene il divisore; qualora poi il divisore è astratto, il quoziente è della medesima natura del dividendo, e non indica più quante volte il dividendo contiene il divisore, ma esso è quella parte del dividendo, la quale moltiplicata per lo divisore, riproduce il dividendo, e per conseguenza conchiudiamo, che *è assurdo il volere addizionare o sottrarre numeri concreti di differente natura; Volere moltiplicare due numeri concreti; o finalmente volere dividere l'uno per l'altro due numeri concreti di differente natura, oppure un numero astratto per un numero concreto.* Ciò posto possiamo ad occuparci de' numeri concreti denominati.

Operazioni ancillari, o preparatorie.

153. **I**l calcolo de' numeri complessi si ricava naturalmente da quello, che abbiamo esposto relativamente alli numeri concreti incompletti, imperocchè per eseguire le operazioni del calcolo sopra di essi, basta trasformarli in frazioni irriduttibili equivalenti, ed eseguire sopra di esse le operazioni del calcolo proposte.

154. Quindi è necessario vedere, in quale maniera un numero complesso può essere trasformato in frazione irriduttibile equivalente, operazione sommamente facile; In fatti, se supponiamo che si voglia ridurre in frazione irriduttibile il numero complesso 3 can. 6 pal. 8 onc., noi diremo, una canna vale 8 palmi, e per conseguenza 3 canne vogliono 3 volte 8 palmi, ossia 24 palmi, dunque 3 can., 6 pal., 8 onc. equivalgono a 30 pal. 8 onc., ma poichè un palmo equivale a 12 oncie, 30 palmi equivaleranno a 360 oncie, ossia a 360 oncie, dunque il numero dato 3 can., 6 pal., 8 onc. equivale a 368 oncie, ma una oncia è la dodicesima parte di un palmo, ed il palmo è la ottava parte della canna, dunque una oncia è $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di una canna, dunque riducendo alla frazione semplice $\frac{1}{96}$ la frazione

ne di frazione $\frac{3}{12}$ di $\frac{7}{8}$ avremo una oncia equivalente ad $\frac{7}{96}$ di una canna, e concluderemo, che il numero complesso 3 can. 6 pal. 8 onc., equivale alla espressione frazionaria $\frac{7}{96}$ di canna, la quale ridotta alla sua minima espressione è $\frac{7}{96}$.

155. Dal che concludiamo generalmente, che qualora vogliamo ridurre un numero complesso in frazione della unità principale, si debbono ridurre tutte le parti del numero dato a quelle della più piccola unità contenuta in esso; la somma di tutte queste parti sarà il numeratore della frazione dimandata, ed il denominatore sarà il numero, che esprime quante volte la minima unità del numero dato è contenuta nella unità principale, frazione che si ridurrà alla sua minima espressione, dividendo li due termini della frazione trovata per lo massimo comune divisore di essi.

156. Reciprocamente se ci proponiamo di ridurre in numero denominato una frazione concreta, basterà fare la divisione del numeratore per lo denominatore, e ridurre sempre li residui ad unità dell'ordine immediatamente inferiore.

Così se ci proponiamo di ridurre la espressione frazionaria concreta $\frac{7}{14}$ di docajo in numero complesso equivalente, noi divideremo 70 per 14, e metteremo al quo-

ziente il numero 5, che indicherà docati, ed
 avremo il residuo 9, che ridurremo a carlini,
 e dividendo il prodotto moltiplicandolo per 10
 90 per 14, avremo per quoziente 6 carl.,
 ed il residuo 6, che moltiplicato per 10 dà
 60 grani, e dividendo 60 grani per 14, 79 14
 avremo per quoziente 70 5. ^{doc.} 6 ^{car.} 4 ^{gr.} 3 ^{c.} $\frac{5}{14}$
 4 grani, e per residuo —
 4 grani, che moltiplicato per 12 dà 48 ca- 90 —
 valli, li quali divisi 84
 per 14 danno al quo- 60
 ziente 3 cavalli, e per 56
 residuo 6, che diviso —
 per 14 dà $\frac{6}{14}$ ossia $\frac{3}{7}$, 48
 ed avremo $\frac{3}{7}$ di doc. 42
 = 5. ^{doc.} 6. ^{car.} 4. ^{gr.} 3. ^{cav.} $\frac{3}{7}$ —

Operazioni del Calcolo sopra de' numeri complessi.

157. **A** vendo veduto, come facilmente possono li numeri complessi essere trasformati in espressioni frazionarie, e reciprocamente le espressioni frazionarie concrete in numeri complessi, chiaramente si vede, quale deve essere il metodo da eseguirle le operazioni del calcolo sopra de' numeri complessi, giacchè basterà ridurli in espressioni frazionarie irriducibili equivalenti, ed indi operare sopra di esse alla maniera ordinaria, e ridurre li risultati in forma di numeri complessi. Dalle considerazioni precedenti noi ricaviamo la seguente regola generale.

158. Qualora debbono eseguirsi le operazioni di calcolo sopra de' numeri complessi noi *incominceremo dal ridurli in espressioni frazionarie irriducibili equivalenti*; indi 1. *Se dobbiamo eseguire una addizione, o una sottrazione, noi opereremo sopra le frazioni equivalenti secondo le regole date, ed il risultato, che ne ricaveremo, trasformato in numero complesso, esprimerà la somma, o il residuo dimandato.* 2. *Se dobbiamo eseguire una moltiplicazione; Ricordandoci, che il moltiplicatore è essenzialmente astratto, noi faremo astrazione della na-*

tura delle unità della frazione, che determina il moltiplicatore, indi eseguiremo la moltiplicazione sopra delle frazioni, e la frazione prodotta, che è essenzialmente della natura del moltiplicando, trasformata in numero complesso, darà il prodotto dimandato. 3. Finalmente se dobbiamo fare la divisione, allora se le espressioni frazionarie equivalenti al dividendo, ed al divisore, sono rapportate alla medesima unità, si dividerà la frazione dividenda per la frazione divisore, facendo astrazione della natura di tale unità, ed il quoziente astratto, che ne risulterà sarà il quoziente dimandato. Se poi il dividendo è un numero concreto, ed il divisore è un numero astratto, si moltiplicherà la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata, il quoziente, che sarà della natura del dividendo, trasformato in forma di numero complesso, esprimerà il quoziente dimandato.

158. Proponiamoci per esempio di eseguire le quattro operazioni del calcolo sopra due numeri complessi

5 doc. 7 car. 8 gr. 5 cav. $\frac{4}{5}$, e 3 doc. 6 car. 7 gr. 9 cav. $\frac{3}{5}$,

noi incominceremo dal ridurli ad espressioni frazionarie, e troveremo che essi daranno

$\frac{34709}{6000}$, $\frac{22063}{6000}$, indi addizionandole avre-

mo la somma $\frac{56777}{6000}$, la quale ridotta in numero complesso dà 9 doc. 4 car. 6 gr. 5 cav. $\frac{2}{5}$; sottraendole troveremo, che la differenza sarà $\frac{12641}{6000}$, la quale ridotta in numero

complesso dà 2 doc. 1 car. 0 gr. 8 cav. $\frac{1200}{6000}$ =

2 doc. 1 car. 0 gr. 8 cav. $\frac{2}{5}$. Indi considerando, che li numeri dati sono amendue concreti della medesima natura, conchiuderemo che dividendo l'uno di essi per l'altro, dobbiamo avere un quoziente astratto, il quale sarà $\frac{34709}{6000} \times \frac{6000}{22068} = \frac{34709}{22068} = 1 \frac{12641}{22068}$.

Finalmente se il moltiplicando fosse 5 doc. 7 car. 8 gr. 5 cav. $\frac{2}{5}$, ossia $\frac{34709}{6000}$ di doc., il

moltiplicatore astratto sarebbe determinato dalle unità, e dalle parti della unità, che si contengono in 3. doc. 6 car. 7 gr. 9 cav. $\frac{3}{7}$,

ossia da $\frac{22068}{6000}$, e perciò moltiplicando

$\frac{34709}{6000}$ per $\frac{22068}{6000}$, avremo il prodotto

$\frac{765958212}{36000000}$, che ridotto in numero complesso dà 21 doc. 2 car. 7 gr. 7 cav. $\frac{2351}{2500}$ = 21 doc. 2 car. 7 gr. 7 cav. $\frac{2351}{2500}$.

che sarà il prodotto dimandato.

159. Qui è a proposito di vedere, quale è la occasione, che può condurci al calcolo precedente. Se si proponesse di trovare quale è l'interesse, che produrrebbe il capitale di 5 doc. 7 car. 8 gr. 5 cav. $\frac{2}{5}$, sapendo che un docato rende 3 doc. 6 car. 7 gr. 9 cav. $\frac{1}{2}$, sostituendo ai numeri denominati le espressioni frazionarie corrispondenti, la operazione si ridurrebbe a cercare l'interesse di

$\frac{34709}{6000}$ di docato, alla ragione di $\frac{22068}{6000}$

per docato, operazione, che si risolve per una via semplicissima, poichè essendo

$\frac{34709}{6000}$ lo interesse di 1 docato, quello di

$\frac{22068}{6000}$ sarà $\frac{22068}{6000}$ di $\frac{34709}{6000} = \frac{765958212}{36000000} =$

21 doc. 2 car. 7 gr. 7 cav. $\frac{2351}{2500}$; e qui av-

vertiremo, che il numero concreto 3 doc.

6 car. 7 gr. 9 cav. $\frac{1}{2}$, ossia $\frac{22068}{6000}$, ha servito

soltanto a determinare il moltiplicatore a-

stratto $\frac{22068}{6000}$, e che si commetterebbe un

grande errore se si confondesse il moltipli-

catore astratto $\frac{22068}{6000}$ con $\frac{22068}{6000}$ di doc.,

il quale ha soltanto servito per determinarlo.

160. Non mi arresto ad esporre li metodi pratici, che si usano operando direttamente sopra de' numeri denominati, poicchè essi si trovano esposti minutamente in tutte le istituzioni di aritmetica pratica.

CAPITOLO X.

*Teoria delle Proporzioni, e delle
Equi differenze.*

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

161. **N**oi abbiamo detto, che per formarci una idea distinta di una quantità, dobbiamo paragonarla ad un'altra della medesima sua specie, quindi noi siamo continuamente condotti a paragonare due numeri fra loro, ed a ricercare il risultato di sì fatto paragone, risultato, che noi chiamiamo *ragione*, o *rapporto*; Ma due numeri possono essere fra loro paragonati in due sole maniere, cioè, o vedendo quante volte uno di essi contiene l'altro, lo che facciamo dividendo l'uno di essi per l'altro, o vedendo di quanto l'uno di essi eccede l'altro, lo che facciamo sottraendo l'uno di essi dal-

l'altro; quindi noi avremo due sole specie di ragioni, o di rapporti; cioè quella de' rapporti, che si hanno per mezzo del quoziente, che si ottiene dividendo l'uno per l'altro li due numeri, che si paragonano, e questi rapporti saranno da noi chiamati *ragioni, o rapporti per quoziente*; l'altra de' rapporti, che si hanno per mezzo della differenza, che si ottiene sottraendo l'uno dall'altro li due numeri, che si paragonano, e tali rapporti da noi si chiameranno *ragioni, o rapporti per differenza*.

162. Giova qui lo avvertire, che gli antichi, senza alcuna ragione, davano il nome di *rapporto geometrico*, o di *ragione geometrica*, a quel rapporto, che noi abbiamo chiamato *ragione, o rapporto per quoziente*, e chiamavano *rapporto aritmetico*, o *ragione aritmetica* quel rapporto, che noi abbiamo chiamato *rapporto, o ragione per differenza*.

163. Chiamiamo termini di un rapporto le quantità, che fra loro si paragonano, e con ispezialità, chiamiamo *antecedente* il termine, che si paragona, e *conseguente* quello, a cui l'altro è paragonato.

164. Non essendo il rapporto per differenza altra cosa, se non che il residuo, che si ha sottraendo un termine dall'altro, ne segue, che non si altera il rapporto per differenza di due quantità, qualora li due termini

di esso si accrescano, o si diminuiscano di una medesima quantità. Similmente considerando il rapporto per quoziente di due quantità, nel quoziente, che si ha dividendo uno de' termini del rapporto per l'altro, ne segue, che il rapporto per quoziente di due quantità non si altera, qualora li due termini di esso si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero.

165. Si dà il nome di *equidifferenza* al paragone di due rapporti per differenza fra loro eguali, e si scrive così $a.b:c.d$, e si esprime dicendo a sta a b per differenza come c sta a d . Dal che si vede, che si fatta equidifferenza può essere designata, o per mezzo della eguaglianza $a-b=c-d$, oppure per $b-a=d-c$, essendo indifferente l'ordine, col quale la differenza si trova, soltanto si deve badare a fare la differenza de' termini de' due rapporti eguali nel medesimo ordine.

166. Similmente si dà il nome di *equiquoziente*, o di *proporzione* al paragone di due rapporti per quoziente eguali fra loro, e la proporzione si scrive così $a:b::c:d$, e si enuncia dicendo a sta a b come c sta a d . Dal che si vede, che si fatta proporzione può essere generalmente espressa per mezzo della eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oppure per l'altra

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, giacchè è indifferente dividere lo antecedente per lo conseguente, o il conseguente per lo antecedente, facendo però sempre attenzione di fare la divisione de' termini de' due rapporti nel medesimo ordine.

167. Qui avvertiremo che gli antichi davano il nome di *proporzione aritmetica* alla equidifferenza, e di *proporzione geometrica* all'equiquoziente, al quale noi diamo esclusivamente il nome di *proporzione*.

168. Queste prenozioni essendo esposte, passiamo ora ad esaminare 1. Le proprietà della proporzione. 2. Le proprietà della equidifferenza.

ARTICOLO II.

Proprietà delle Proporzioni.

169. **S**ia la proporzione $a : b :: c : d$; per quello che abbiamo detto, essa può essere posta sotto la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ma qualora due frazioni sono eguali, riducendole allo stesso denominatore restano eguali, dunque $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$, ma qualora due frazioni, che hanno lo stesso denominatore sono eguali fra loro, debbono avere li numeratori eguali, dunque $a \times d = c \times b$, ma $a \times d$ è il prodotto de' termini estremi, e $c \times b$ è il prodotto delli termini di mezzo, dunque in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' termini di mezzo.

170. Sieno ora li due rapporti di $a : b$, e di $c : d$ diseguali fra loro, le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ saranno fra loro diseguali, ma due frazioni diseguali, ridotte al medesimo denominatore, restano diseguali, dunque $\frac{a \times d}{b \times d}$ non sarà eguale a $\frac{c \times b}{d \times b}$, ma due frazioni diseguali, che hanno lo stesso denominatore, deb-

215

bono avere li numeratori diseguali; dunque $a \times d$ non può essere eguale a $c \times b$; ma $a \times d$ è il prodotto de' termini estremi; e $c \times b$ è il prodotto de' termini medj, dunque qualora due rapporti sono diseguali, il prodotto de' termini estremi non può essere eguale al prodotto de' termini di mezzo.

171. Dalle verità dimostrate ricaviamo 1.
 Che se quattro grandezze sono tali, che il prodotto delle estreme sia eguale al prodotto delle medie, esse formano una proporzione, imperocchè se esse non formassero una proporzione, il prodotto delle estreme non sarebbe eguale al prodotto delle medie.

2. Che se quattro quantità sono tali, che il prodotto delle estreme non sia eguale al prodotto delle medie, esse non possono formare proporzione. Imperocchè se esse formassero una proporzione, il prodotto delle estreme dovrebbe essere eguale al prodotto delle medie.

3. Che se noi facciamo subire de' cambiamenti alli termini di una proporzione, facendo in modo, che l'ordine in cui si dispongono, sia tale, che il prodotto de' termini estremi sia eguale al prodotto de' termini di mezzo, le quantità saranno sempre proporzionali. Quindi nella proporzione $a : b :: c : d$ li termini possono essere disposti nelle seguenti otto maniere.

$$a : b :: c : d$$

$$a : c :: b : d$$

$$b : a :: d : c$$

$$b : d :: a : c$$

$$c : d :: a : b$$

$$c : a :: d : b$$

$$d : c :: b : a$$

$$d : b :: c : a$$

Disposizioni, nelle quali le quantità restano sempre proporzionali, poichè in tutte esse il prodotto de' termini estremi, ed il prodotto de' termini medj sono formati dalli medesimi fattori.

172. Il cambiamento d'ordine de' termini della proporzione, mediante il quale alterano il posto li due termini medj, alcune volte si chiama *alternazione*, o *permutazione*, e quello in cui cambiano di posto li termini di ciascheduno de' rapporti, si chiama *inversione*.

173. Sia la proporzione $a : b :: c : d$, noi avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ma se due quantità eguali si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero, li prodotti, o li quozienti, che ne risultano sono eguali, dunque moltiplicandò per qualunque numero, che noi designeremo con la lettera n le due frazioni eguali $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, avremo $\frac{a \times n}{b} = \frac{c \times n}{d}$; e di

videndole per n sarà $\frac{a}{b \times n} = \frac{c}{d \times n}$; ma la prima di queste eguaglianze ci fornisce la proporzione $a \times n : b :: c \times n : d$, e la seconda dà la proporzione $a : b \times n :: c : d \times n$; dunque qualora si moltiplicano per lo stesso numero gli antecedenti, o li conseguenti di una proporzione, le quantità restano proporzionali.

174. Similmente avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e

$\frac{b}{n} = \frac{d}{n}$; ma la prima di tali eguaglianze dà la proporzione $\frac{a}{n} : b :: \frac{c}{n} : d$, e la

seconda fornisce la proporzione $a : \frac{b}{n} :: c : \frac{d}{n}$.

Quindi qualora quattro quantità sono proporzionali, dividendo gli antecedenti, oppure li conseguenti per lo stesso numero, esse restano proporzionali.

175. La stessa proporzione dà sempre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ma qualora due quantità eguali si accrescono, o si diminuiscono della medesima quantità, le somme, o le differenze, che ne

risultano restano eguali, dunque avremo $\frac{a}{b} + n = \frac{c}{d} + n$; ed $\frac{a}{b} - n = \frac{c}{d} - n$, e riducendo queste quantità ad espressioni frazionarie avremo $\frac{a+b \times n}{b} = \frac{c+d \times n}{d}$, come ancora $\frac{a-b \times n}{b} = \frac{c-d \times n}{d}$, delle quali

eguaglianze la prima ci dà la proporzione $a + b \times n : b :: c + d \times n : d$, e la seconda fornisce la proporzione $a - b \times n : b :: c - d \times n : d$. Dal che conchiuderemo, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, un antecedente unito ad un multiplice qualunque del suo conseguente sta allo stesso conseguente, come l'altro antecedente unito allo egualmente multiplice del suo conseguente allo stesso conseguente; che un antecedente diminuito di un multiplice qualunque del suo conseguente sta allo stesso conseguente, come l'altro antecedente diminuito dello egualmente multiplice del suo conseguente allo stesso conseguente.*

176. Quindi se supponiamo $n = 1$ avremo $a + b : b :: c + d : d$; come ancora $a - b : b :: c - d : d$, e diremo, che in ogni proporzione la somma, o la differenza de' due primi termini sta al secondo termine come la somma o la differenza delli due ultimi termini sta all'ultimo termine.

177. Avendo dimostrato, che la proporzione $a:b::c:d$ ci fornisce le due altre $a+b:b::c+d:d$, ed $a-b:b::c-d:d$, ne segue, che, permutando, avremo $a+b:c+d::b:d$, ed $a-b:c-d::b:d$; dunque qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza de' termini del primo rapporto sta rispettivamente alla somma, o alla differenza de' due termini del secondo rapporto come il primo al secondo conseguente, e poichè permutando li termini della proporzione $a:b::c:d$, noi abbiamo $a:c::b:d$, noi possiamo ancora dire, che qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza de' due termini del primo rapporto sta rispettivamente alla somma, o alla differenza de' termini del secondo rapporto, come il primo antecedente al secondo.

178. Dippiù avendo dimostrato che $a+b:c+d::b:d$, e che $a-b:c-d::b:d$, ne segue che $a+b:c+d::a-b:c-d$, e permutando $a+b:a-b::c+d:c-d$. Dal che concludiamo generalmente, che qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma de' due termini del primo rapporto sta alla loro differenza come la somma de' due termini del secondo rapporto sta alla loro differenza.

179. In oltre se nella proposta $a:b::c:d$

noi cambiamo di luogo li termini di mezzo, avremo $a : c :: b : d$; e per conseguenza $a + c : c :: b + d : d$, ed $a - c : c :: b - d : d$ e di nuovo permutando, sarà $a + c : b + d :: c : d$ ed $a - c : b - d :: c : d$; dal che conchiudiamo generalmente, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza degli antecedenti sta rispettivamente alla somma, o alla differenza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.*

180. Supponiamo ora, che noi abbiamo una serie di rapporti eguali, per esempio $a : b :: c : d :: e : f :: g : h$ etc.; per quello che abbiamo dimostrato, noi avremo $a + c : b + d :: c : d :: e : f$; e per conseguenza $a + c + e : b + d + f :: e : f :: g : h$, e per conseguenza $a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h$ etc. Sicchè *qualora si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti li conseguenti come uno degli antecedenti sta al conseguente suo.*

181. Sieno le due proporzioni $a : b :: c : d$, $e : f :: g : h$, la prima delle quali ci fornisce l'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e la seconda ci dà $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ma se moltiplichiamo in corrispondenza li membri di queste eguaglian-

ze, noi avremo $\frac{a \times e}{b \times f} = \frac{c \times g}{d \times h}$, eguaglianza

la quale dà la proporzione $a \times e : b \times f :: c \times g : d \times h$; dunque qualora si moltiplicano in corrispondenza li termini di due proporzioni, li prodotti, che ne risultano, restano fra loro proporzionali. E poichè li rapporti, che nascono dal moltiplicare in corrispondenza li termini di più proporzioni si dicono *rapporti composti* da quelli, dalla moltiplicazione de' termini de' quali essi sono formati, e che chiameremo *rapporti componenti*, noi potremo esprimere la verità dimostrata dicendo, *che se vi sono due rapporti rispettivamente eguali a due altri rapporti, il rapporto composto dalli due primi è eguale al rapporto composto dalli due secondi*; e poichè il raziocinio da noi adoperato per dimostrar questa verità, può facilmente essere applicato al caso, in cui vi sia un numero qualunque di rapporti rispettivamente eguali ad altrettanti rapporti, noi conchiuderemo generalmente, che *qualora si hanno più rapporti eguali rispettivamente ad altrettanti rapporti, il rapporto composto da tutti li primi è eguale al rapporto composto da tutti li secondi*.

182. Dippiù essendo $a : b :: c : d$; noi avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ed elevando alla medesima potenza n ambi li membri di questa egua-

egualianza avremo $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$, ma questa egualianza ci fornisce la proporzione $a^n : b^n :: c^n : d^n$; Dunque qualora li termini di una proporzione si elevano alla medesima potenza, le potenze che ne risultano sono proporzionali.

Similmente se da ambi li membri della medesima egualianza da noi si estrae una radice del medesimo grado, noi avremo

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}, \text{ egualianza, che ci fornisce la}$$

proporzione $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$; e perciò se dalli termini di una proporzione si estrae una radice del medesimo grado, le radici, che ne risultano sono proporzionali.

183. Finalmente se si hanno le due proporzioni $a : b :: c : d$, $e : f :: g : h$, le quali abbiano li medesimi conseguenti, permutando avremo $a : c :: b : d$, $e : g :: f : h$; e perciò $a : c :: e : g$; Dunque qualora due proporzioni hanno li medesimi conseguenti gli antecedenti di esse sono proporzionali.

184. Similmente se vi sono le due proporzioni $a : b :: c : d$, $a : f :: c : h$, le quali abbiano li medesimi antecedenti, permutando avremo $a : c :: b : d$, $a : c :: f : h$, e

perciò $b : d :: f : h$, Quindi qualora due proporzioni hanno li medesimi antecedenti, li conseguenti di esse formano una proporzione. 233

ARTICOLO III.

Metodo per trovare il termine ignoto di una proporzione, in cui gli altri tre termini sono noti.

185. **S** spesso accade, che in una proporzione tre termini sieno noti, e l'altro sia ignoto, e che per conseguenza sia necessario di determinare sì fatto termine ignoto; allora possono darsi due casi, cioè 1. Che il termine ignoto sia uno de' termini estremi, 2. Che esso sia uno de' termini medj. In ambi li casi è facile determinare il termine ignoto, facendo uso della verità dimostrata, che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' termini medj.

186. In fatti sia la proporzione $a : b :: c : x$, nella quale sia ignoto il termine estremo x , per la verità enunciata avremo $a \times x = b \times c$, e dividendo ambi li membri di questa equazione per a , avremo $x = \frac{b \times c}{a}$, ma $b \times c$ è il prodotto de' termini di mezzo, ed a è l'estremo cognito, dunque

lo estremo ignoto si determina, dividendo il prodotto de' termini di mezzo per lo estremo cognito.

187. Similmente nella proporzione $a:b::x:d$ sia ignoto il termine medio x , facendo uso del medesimo principio, noi avremo $a \times d = b \times x$, e dividendo ambi li membri di questa equazione per b , avremo $\frac{a \times d}{b} = x$; ma

$a \times d$ è il prodotto de' termini estremi, e b è il medio noto; Quindi conchiuderemo, che qualora in una proporzione uno de' termini melj è ignoto, esso si determina dividendo il prodotto de' termini estremi per lo medio cognito.

188. Qui giova avvertire, che potrebbe la proporzione avere tre soli termini distinti; il termine di mezzo facendo l'ufficio di conseguente nel primo rapporto e di antecedente nel secondo, nel quale caso la proporzione è detta *continua*, come sarebbe $a:b::b:c$, ed allora il prodotto de' termini di mezzo si riduce al quadrato del termine medio, e diremo, che qualora in una proporzione continua si deve determinare uno de' termini estremi, esso si troverà dividendo il quadrato del termine medio per lo estremo cognito, e che se si vuole determinare il termine medio, esso si avrà estraendo la radice quadrata dal prodotto de' termini estremi.

ARTICOLO V.

Della Teoria delle equidifferenze.

189. **S**ia la equidifferenza $a.b : c.d$. Essa potrà esser posta sotto la forma $a-b=c-d$; Ma a tali quantità eguali se si aggiunga di comune la quantità $b+d$ avremo $a+d=b+c$ ma $a+d$ è la somma de' termini estremi, $b+d$ è quella de' termini di mezzo; dunque *in qualunque equidifferenza la somma de' termini estremi è eguale a quella de' termini di mezzo.*

I rapporti per differenza $a.b, c.d$ sieno fra loro diseguali: $a-b$ non sarà eguale a $c-d$; e perciò se a tali quantità diseguali si aggiungerà la comune $b+d$, avremo le quantità $a+d, b+c$, che saranno ancora fra loro diseguali. Ma $a+d$ è la somma degli estremi de' due rapporti dati, e $b+c$ la somma de' termini di mezzo; dunque *quando due rapporti per differenza sono diseguali, la somma de' loro termini estremi non può essere eguale a quella de' loro termini di mezzo.*

190. Dal che ricaviamo 1. *che se quattro quantità siano tali, che la somma delle estreme eguagli quella delle medie, esse formeranno una equidifferenza*; imperciocchè se non la formassero, la somma de' termini estremi non equaglierebbe quella de' termini medj: 2. *che se quattro quantità sono tali, che la somma de'*

termini estremi non è eguale a quella de' termini medj, esse non possono formare una equi-differenza; imperciocchè se queste quantità formassero una equidifferenza, la somma degli estremi equivarrebbe a quella de' medj.

191. Le cose dette ci danno un metodo facile per determinare uno de' termini della equidifferenza, qualora gli altri tre sono noti. In fatti, se nella equidifferenza a, b, c, x sia ignoto l'estremo x , noi avremo $a+x=b+c$; e togliendo da queste quantità eguali la quantità comune a , sarà $x=b+c-a$. Se poi il termine ignoto sia uno de' termini medj, come sarebbe x nella equidifferenza a, b, x, c , noi avremo la eguaglianza $a+c=b+x$; e togliendo da ambi i membri di essa di comune la quantità b , avremo $x=a+c-b$. Dal che ricaviamo generalmente, *che qualora in una equidifferenza si vuole determinare uno de' termini, se esso è estremo, noi lo troveremo sottraendo il termine noto dalla somma de' termini medj; se poi è un medio, esso si determinerà sottraendo il medio noto dalla somma degli estremi.*

192. Qui giova avvertire, che qualora una equidifferenza abbia solamente tre termini fra loro distinti, essendovene uno, che faccia da conseguente nel primo rapporto, e da antecedente nel secondo, nel qual caso la equidifferenza dicesi *continua*, la somma de' termini estremi è il doppio del termi-

ne medio; ed in tale caso l'estremo ignoto equivale al residuo, che si ottiene sottraendo l'estremo noto dal doppio del termine medio; ed il termine medio sarà eguale alla metà della somma de' termini estremi.

CAPITOLO XI.

Applicazione della Teoria delle proporzioni alla soluzione di alcuni problemi numerici.

193. **P**er dare a questa materia tutta la chiarezza della quale essa è suscettibile, io esporrò alcune nozioni preliminari.

194. Def. 1. Io chiamo *effetto*, qualunque cosa, la quale è, o può essere considerata come prodotta, vale a dire, tutto ciò, che non racchiude unicamente in se la ragione della sua esistenza.

195. Def. 2. Dò il nome di *cagione* a tutto ciò, che produce, o concorre alla produzione di un effetto.

Così, per esempio, una somma di danaro, che io ricevo da una persona, è un effetto, il quale può nel medesimo tempo avere per cagioni, un capitale impiegato prima nelle sue mani, il tempo durante il quale è restato impiegato, e lo interesse da me convenuto con lui.

196. Def. 3. Un *effetto* si dice *semplice*, quando risulta, oppure è considerato come risultante da una cagione unica, e nel caso contrario è detto *effetto composto*.

Nella natura effettivamente molto piccolo è il numero degli effetti veramente semplici, ma, molto spesso noi, consideriamo come semplici gli effetti composti, degli quali una sola delle cagioni varia, nel mentre si suppone, che tutte le altre restino le medesime.

Così per esempio quantunque la quantità del danaro, che si dee sborzare per avere un pezzo di panno di una certa lunghezza, non dipenda soltanto da sì fatta lunghezza, ma ancora dalla larghezza, e dalla qualità del panno, tuttavia noi consideriamo tale quantità di danaro, come se dipendesse unicamente dalla lunghezza del pezzo di panno, giacchè tacitamente si suppone, che la sua larghezza, e la sua qualità restino invariabili.

197. Def. 4. Si dice, che un effetto è in *ragione diretta* della sua cagione, o di qualcheuna delle sue cagioni, qualora (le altre cose restando eguali), la cagione divenendo un certo numero di volte maggiore, o minore, l'effetto diviene precisamente lo stesso numero di volte maggiore, o minore.

In questo senso si dice, che il prez-

zo, che si dee pagare per una mercanzia è in ragione diretta della quantità, che noi ne compriamo.

198. Def. 5. Noi diciamo, che un effetto è in *ragione inversa* della sua cagione, o di una delle sue cagioni, qualora (tutte le altre cose restando eguali) divenendo la cagione un certo numero di volte maggiore, o minore, lo effetto diviene precisamente lo stesso numero di volte minore, o maggiore.

In questo senso noi diciamo, che il tempo, che un uomo impiega a percorrere lo spazio di una lunghezza data è in ragione inversa della velocità, con cui esso si muove.

199. Queste nozioni premesse, vediamo come la teoria delle proporzioni da noi esposta può condurci alla soluzione di alcuni problemi; tutta la difficoltà, che possiamo incontrare, quando ci proponiamo di sciogliere un problema, si riduce a trovare la maniera da disporre i termini di una proporzione, ed ecco la regola sicura per dare ad essa quella disposizione, che conviene.

200. Tra li quattro termini; dalli quali deve essere composta una proporzione, ve ne sono sempre due della medesima specie tutti e due cognitivi, e due di un'altra specie, tra li quali ve ne è uno ignoto, quindi dopo di avere ben distinti li due termini

di ciascheduna delle due specie, noi stabiliremo un rapporto fra le due quantità note, che noi considereremo come le due cagioni produttrici ciascheduna di un effetto, li quali sono li numeri dell'altra specie, tra li quali vi è la quantità ignota, indi avvertiremo al rapporto, che hanno fra loro le quantità cagioni, e diremo, che lo stesso rapporto deve esistere tra le quantità considerate come effetti delle prime, quindi essendo le quantità cagioni amendue note, noi decidiamo evidentemente se lo antecedente è maggiore, o minore del conseguente, e ne concludiamo, che qualora lo antecedente è maggiore del conseguente, similmente nel rapporto, nel quale li termini sono gli effetti, l'antecedente dee essere maggiore del conseguente, e vice-versa; quindi avendo deciso per mezzo del raziocinio, quale degli effetti dee essere maggiore, o minore dell'altro, si stabilirà la proporzione, facendo, cagione maggiore a cagione minore, come effetto maggiore ad effetto minore, oppure cagione minore a cagione maggiore come effetto minore ad effetto maggiore, indi la proporzione così stabilita, si determina il termine ignoto, ed il problema sarà risolto. Tutte queste cose verranno poste in chiaro da alcuni esempj, che da noi si proporranno per esercizio de' principanti.

201. Prob. I. *Due capitali, uno di 789 docati, l'altro di 576 sono stati impiegati alla medesima ragione, si sa che quello di 789 docati ha dato in un anno lo interesse di 84 docati, si cerca sapere quanto renderà il capitale di 576. docati.*

In questo problema vi sono li due capitali, l'uno di 789 doc., l'altro di 576 ambidue noti, e di essi quello di 789 è cagione dello interesse noto, l'altro di 576 deve produrre lo interesse ignoto, che noi disegneremo con la lettera x ; Avendo così distinto le cagioni, e gli effetti, incominceremo dallo stabilire il rapporto tra le due cagioni, il quale può indifferentemente essere quello di 789: 576, o quello di 576: 789; indi ragioneremo così, se il capitale primo fosse il doppio, il triplo, il quadruplo etc., oppure la metà, il terzo, il quarto etc. del secondo, similmente lo interesse dal primo prodotto sarebbe il doppio, il triplo, il quadruplo, etc., oppure la metà il terzo, il quarto etc. di quello prodotto dal secondo, dal che concludiamo, che li capitali sono nella ragione diretta degli interessi da essi prodotti, e che per conseguenza se nel primo rapporto, il primo termine è fatto dal capitale maggiore, nel secondo rapporto il primo termine sarà la rendita da esso prodotta, che è maggiore, e vice-versa se il primo termine è il capitale minore, nel secondo

rapporto il primo termine dee essere lo interesse da esso prodotto, che è il minore, e perciò da noi si potrà indifferentemente stabilire una delle due proporzioni

$$789 \text{ doc.} : 576 \text{ doc.} :: 84 \text{ doc.} : x$$

$$576 \text{ doc.} : 789 \text{ doc.} :: x : 84 \text{ doc.}$$

E determinando in una di esse il valore di x , avremo sempre

$$x = 84 \times \frac{576}{789}$$

E qui avvertiremo, che il termine ignoto viene determinato dal numero 84 doc., che è il numero concreto esprimente lo interesse noto, moltiplicato per lo numero astratto, che nasce dal dividere l'uno per l'altro li due numeri concreti della medesima specie, che formano il primo rapporto, e che in questo caso in cui gli effetti sono in ragione diretta delle cagioni, il dividendo è il termine cagione dello effetto ignoto, ed il divisore è il termine cagione dello effetto noto.

202. Della stessa maniera ragioneremo, qualora dobbiamo sciogliere qualunque altro problema, in cui gli effetti sono in ragione diretta delle cagioni, che li producono, e le stesse operazioni di calcolo, ce ne forniranno la soluzione. Li problemi, nè quali le cagioni sono in ragione diretta degli effetti da esse prodotti, si dicono problemi,

che si sciolgono con la regola del tre semplice, e diretta.

203. Prob. 2. *Un capitano ha nutrito 72 soldati con una data quantità di farina per lo spazio di 90 giorni; il medesimo deve ora nutrire con la stessa quantità di farina 97 uomini; si dimanda: per quanti giorni essa può bastare.*

Facendo il raziocinio come nel problema precedente, noi troviamo le due quantità note della medesima specie essere 72 uomini, e 97 uomini, e li due effetti, tra li quali uno è ignoto, essere il noto 90 giorni, tra li quali 72 uomini hanno consumata la farina, ed x giorni ignoto, che sono quelli nè quali 97 uomini consumeranno una eguale quantità di farina. Indi stabiliremo ad arbitrio il primo rapporto, che è quello delli numeri degli uomini, facendo ad arbitrio $72 : 97$, oppure $97 : 72$; indi cercheremo di scoprire, in quale maniera le ragioni producono gli effetti, e troveremo, che a proporzione, che il numero degli uomini cresce, diminuisce il tempo in cui possono essere nutriti, ed a proporzione, che diminuisce il numero degli uomini, cresce quello de' giorni, e concludiamo in conseguenza de' principj esposti, che le ragioni sono in ragione reciproca degli effetti, che esse producono, e poichè il primo termine del secondo rap-

porto deve essere maggiore o minore del secondo, qualora il primo termine del primo rapporto è maggiore, o minore del secondo, ne segue che noi potremo ad arbitrio stabilire una delle due proporzioni

$$72 : 97 :: x : 90$$

$$97 : 72 :: 90 : x$$

ed avremo $x = 90 \times \frac{72}{97}$, e qui ancora av-

vertiremo, che il numero de' giorni dimandato, si trova moltiplicando il numero de' giorni noto per lo numero astratto, che nasce dalla divisione de' numeri concreti della medesima specie, che formano li due termini del primo rapporto, e che in questo caso, in cui gli effetti sono nella ragione reciproca delle cagioni, il dividendo è il termine cagione dello effetto noto, ed il divisore è il termine cagione dello effetto incognito.

204. Li problemi di questa specie, cioè li problemi, nè quali le cagioni sono in ragione reciproca degli effetti, si dicono comunemente problemi, li quali si sciolgono per la regola del tre semplice reciproca,

205. Prob. 3. Un capitale di 364 doc. impiegato per lo spazio di 5 anni ha dato 242 docati di profuto, si dimanda quanto renderà un altro capitale di 755 doc.

impiegato alla stessa ragione per lo spazio di 8 anni.

Qui dobbiamo considerare li due interessi prodotti dalli due impieghi come effetti prodotti da due specie diverse di cagioni; cioè dalle somme impiegate, e dalli tempi, che esse sono restate impiegate; quindi noi incominceremo dal determinare lo effetto, come se essi non avessero altre cagioni fuori di quelle de' due capitali, che essendo diseguali fanno variare le rendite, e poicchè evidentemente si fatte rendite sono in ragione diretta de' capitali, chiamando in questa supposizione x la rendita ignota, noi potremo stabilire indifferentemente una delle due proporzioni

$$\begin{array}{l} 364 : 753 :: 242 : x \\ 753 : 364 :: x : 242 \end{array}$$

E determinando in una di esse il valore di x , avremo $x = 242 \times \frac{753}{364}$

Indi diremo il capitale di 753 renderebbe $242 \times \frac{753}{364}$, se fosse impiegato per 5 anni;

e conchiuderemo, che vi saranno due effetti; li quali sono le rendite di un medesimo capitale invariabile, una delle quali ha per cagione 5 anni, l'altra 8 anni, quindi chiamando y la rendita dimandata, che il capi-

246

ale deve dare fra 8 anni, evidentemente
conosciamo che si fatte rendite sono in ra-
gione diretta delle loro cagioni, quindi sta-
biliremo indifferentemente una delle due
proporzioni

$$5 : 8 :: 242 \times \frac{753}{364} : y$$

$$8 : 5 :: y : 242 \times \frac{753}{364}$$

e determineremo in una di esse il valore
di y , e troveremo $y = 242 \times \frac{753}{364} \times \frac{8}{5}$,

noi troveremo, che lo interesse ignoto si
trova moltiplicando lo interesse noto per li
numeri astratti, che nascono dal dividere
rispettivamente fra loro li numeri concreti
della medesima specie, che formano li primi
rapporti nelle due proporzioni.

206. Prob 4. *Vi sono due compagnie di
lavoratori, che lavorano a due opere della
medesima difficoltà, e si sa, che la prima
di esse è composta da 24 uomini, li quali
lavorano 7 ore al giorno, e che hanno fat-
to 12 palmi in lunghezza, 16 in altezza,
e 4 in larghezza, nel termine di 18 gior-
ni; si sa ancora, che la seconda compa-
gnia è composta di 20 uomini, li quali la-
vorano come li primi, ma 9 ore al giorno,
e che debbon fare 14 palmi in lunghezza,*

13 in altezza, e 5 in larghezza, si vuole sapere quanti giorni essi impiegheranno a fare questo lavoro.

Egli è evidente, che li numeri de' giorni sono effetti dipendenti da varie cagioni, cioè dal numero degli operarj; delle ore di lavoro, che essi fanno in ciascheduno giorno, e dalle differenti lunghezze, altezze, e larghezze del lavoro; quindi noi incominceremo a vedere, quale sarebbe il numero de' giorni, che la seconda compagnia impiegherebbe a fare il lavoro della prima, travagliando in ciaschedun giorno il medesimo numero di ore, che travaglia la prima, e chiamando x si tutto numero de' giorni, noi osserveremo, che a proporzione, che il numero de' lavoratori cresce, o diminuisce, vice-versa il numero de' giorni diminuisce, o cresce, quindi conchiudiamo, che gli effetti sono nella ragione reciproca delle cagioni, e stabiliremo una delle due proporzioni ad arbitrio

$$24 : 20 :: x : 18;$$

$$20 : 24 :: 18 : x.$$

e determinando in una di esse il valore di x , avremo $x = 18 \times \frac{24}{20}$

Indi diremo, il numero de' giorni, che la seconda compagnia avrebbe impiegato a fare il lavoro della prima, sarebbe stato $18 \times \frac{24}{20}$, se li lavoratori avessero fatigato

7 ore al giorno; ma essi ne hanno lavorato 9, dunque noi abbiamo due cagioni, cioè 7 ore di travaglio, e 9 ore di travaglio, abbiamo lo effetto, che la prima produce, cioè il numero de' giorni espresso da $18 \times \frac{24}{20}$, e si cerca lo effetto della seconda, che noi chiameremo y , e considereremo, che nella medesima ragione, che cresce, o manca il numero delle ore del travaglio giornaliero, manca, o cresce il numero de' giorni da impiegarsi per compiere il lavoro della prima compagnia, e concludiamo, che le cagioni sono nella ragione inversa degli effetti, e perciò faremo una delle seguenti proporzioni

$$7 : 9 :: y : 18 \times \frac{24}{20}$$

$$9 : 7 :: 18 \times \frac{24}{20} : y$$

e determineremo in una di esse il valore di y , e troveremo $y = 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9}$.

Di poi osserveremo, che il numero determinato de' giorni, che la seconda compagnia impiegherebbe, suppone che essi avessero fatto 12 palmi in lunghezza del lavoro, nel mentre essi debbono farne 14, quindi il numero de' giorni determinato ha per cagione 12 palmi di lunghezza, nel mentre noi dobbiamo determinare il numero de' giorni, che ha per cagione 14 palmi, numero, che noi chiameremo z , e poicchè è evidente, che a proporzione, che crescono, o mancano li

numeri de' palmi del lavoro, cresce o manca il numero de' giorni, che si debbono impiegare per eseguirli; noi conchiutiamo, che gli effetti, ossia li numeri de' giorni sono in ragione diretta delle loro cagioni, cioè de' numeri de' palmi del lavoro, e perciò stabiliremo ad arbitrio una delle due proporzioni

$$13 : 14 :: 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} : z$$

$$14 : 12 :: z, 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9}$$

e determinando in una di esse il valore di z , avremo $z = 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{12}$

Similmente ragionando, vediamo, che il numero de' giorni determinato deve variare, giacchè esso corrisponde alla cagione 16 palmi di altezza, nel mentre deve dipendere da 15 palmi, quindi le cagioni saranno 16 palmi, e 13 palmi, e l'effetto prodotto da 16 palmi è $18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{12}$, e si deve determinare quello corrispondente a 13 palmi, che chiameremo u , ed essendo evidente, che tali effetti sono in ragione diretta delle loro cagioni, noi stabiliremo una delle due proporzioni

$$16 : 13 :: 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{12} : u \text{ oppure}$$

$$13 : 16 :: u : 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{12}$$

e troveremo che

$$u = 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{16}$$

Finalmente ragionando totalmente come

ora abbiamo fatto, troviamo che il numero de' giorni determinato corrisponde al numero di 5 palmi di larghezza, nel mentre dobbiamo determinare quello, che ha per cagione 4 palmi di larghezza, e chiamando si fatto aumento w , vedremo, che noi dobbiamo stabilire una delle due proporzioni

$$\begin{aligned} 5 : 4 :: 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} : w \\ 4 : 5 :: w : 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \end{aligned}$$

in una delle quali determinando il valore di w , avremo

$$w = 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{5}{1}$$

207. Dal che riceviamo, che il numero de' giorni impiegati da 20 uomini lavorando 9 ore al giorno per fare 14 palmi in lunghezza, 13 in altezza, e 5 in larghezza è eguale al prodotto, che nasce moltiplicando 18 giorni per gli numeri astratti, che nascono dividendo li numeri concreti della medesima specie, che formano li termini delle ragioni semplici, che avrebbero luogo, se si supponessero gli effetti provenienti successivamente da due cagioni omogenee.

208. Li due ultimi problemi da noi proposti sono conosciuti sotto il nome di problemi, che si sciolgono per mezzo della *regola del tre composta*; ed osservando minutamente quello, che in essi deve essere considerato,

noi vediamo 1. che nè medesimi non può esservi più di una sola ignota. 2. Che i dati debbono sempre essere in numero dispari. 3. Che un solo de' dati è della stessa natura della ignota. 4. Che gli altri dati sono sempre a due a due della medesima specie.

209. In conseguenza di quanto abbiamo detto, possiamo rinchiudere il metodo pratico per isciorre li problemi di questa specie nella regola seguente.

La ignota è sempre eguale alla sola quantità nota della medesima sua specie moltiplicata per una serie di frazioni, li rispettivi termini delle quali sono le quantità cognite della medesima specie.

210. Resta ora a sapere relativamente a ciascuna frazione, quale termine deve essere il numeratore, e quale il denominatore, locchè facilmente determineremo per mezzo della seguente regola.

Il numeratore di ciascuna delle frazioni, per le quali deve essere moltiplicato il numero cognito della medesima specie del numero dimandato per determinare tale numero ignoto, deve essere maggiore o minore del denominatore, secondochè (supponendo eguali fra loro li due termini di tutte le altre frazioni, ossia ciò che vale lo stesso supponendo la regola del tre semplice) il numero dimandato dovrebbe es-

tere maggiore, o minore del numero cognito della medesima sua specie.

211. Li problemi, che volgalmente si dicono essere della *regola di compagnia* si sciolgono con lo stesso metodo precedente; in fatti supponiamo.

Che tre mercanti A, B, C abbiano fatta una società, fornendo in essa le seguenti somme, A doc. 356, B doc. 842, C doc. 796; la somma delli quali ha fruttato 426 doc, si domanda quanto deve percepire dalla somma luorata ciascheduno degli associati.

Per isciorre il proposto problema, noi incominceremo dal considerare, che la somma $356 + 842 + 796$ è la cagione del luoro totale 426, e che 356 è la cagione della parte di 426 che tocca ad A la quale chiameremo x ; Il che 842 è la cagione della porzione de' 426, che tocca a B, e che chiameremo y , III in fine, che 796 è la cagione della parte del medesimo numero 426, che si deve dare a C, e che noi chiameremo z ; quindi facendo uso del metodo ordinario avremo le tre proporzioni

$$356 + 842 + 796 \text{ ossia}$$

$$1967 : 356 :: 426 : x$$

$$1967 : 842 :: 426 : y$$

$$1967 : 796 :: 426 : z$$

Per mezzo delle quali determinando li valori delle ignote avremo